Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2018

Einführung in die Funktionentheorie : Übungsblatt 6

Jonas Ziefle 6. Juli 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 13. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Man berechne:

a)
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}dx$$

b)
$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+a^2}dx, \qquad a>0$$

c)
$$\int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}dx, \qquad a>0$$

Aufgabe 2. Seien ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{C}$ reell–linear unabhängig und f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe doppelt periodische Funktion, d.h.,

$$f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Man zeige, daß f auf dem "Fundamentalbereich"

$$F = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid 0 \leq \lambda_i < 1\}$$

ebenso viele Polstellen wie Nullstellen hat (gezählt mit Vielfachheiten).

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) Sei γ eine geschlossene Kurve in $U \subset \mathbb{C}$, die eine Gebiet $G \subset U$ berandet, welches homöomorph zu einer Kreisschreibe ist. Sind f, $g\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $|g(z)| < |f(z)|$ für alle z im Bild von γ, dann haben f und $f+g$ im Gebiet G dieselbe Anzahl von Nullstellen.
b) Benutzen Sie a) um den Fundamentalsatz der Algebra zu zeigen.

Aufgabe 4. Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom von Grad ≥ 1. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$z \in \mathbb{C} \to p(z) \in \mathbb{C}$$

sich zu einer holomorphen Abbildung von $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1$ nach $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1$ fortsetzen läßt. Zeigen Sie, daß das Bild dieser Abbildung offen und abgeschlossen ist. Folgern Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 5.* Zeigen Sie, daß sich $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ entlang von keiner Kurve, welche $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ verläßt, analytisch fortsetzen läßt.