Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2018

Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 1

Jonas Ziefle 16. Oktober 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 25. Oktober vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Zweierabgaben sind erlaubt. Bitte bei der ersten Abgabe Matrikelnummer(n) angeben.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß ein metrischer Raum genau dann eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge hat. Folgern Sie, daß $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ bezüglich der Quotiententopologie (vgl. Aufgabe 6) eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homöomorph zum Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der Quotiententopologie (wie in Aufgabe 2) homöomorph ist zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mit der Produkttopologie (vgl. Aufgabe 7).

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die *projektiven Räume*

$$\mathbb{KP}^n = (\mathbb{K}^{n+1}\backslash\{0\})_{/\sim}, \qquad v \sim w \Leftrightarrow v = w\lambda \text{ für } \lambda \in \mathbb{K}$$

über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ bezüglich der Quotiententopologie (vgl. Aufgabe 6) topologische Mannigfaltigkeiten sind.

Übungsaufgaben (für das 1. Tutorium)

Aufgabe 5. Zeigen Sie, daß eine bijektive stetige Abbildung

$$f\colon X \to Y$$

von einem kompakten Raum X in einen Hausdorffraum Y ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 6. Gegeben ein topologischer Raum X und eine surjektive Abbildung

$$p\colon X \to \tilde{X},$$

so ist die *Quotiententopologie* auf $\tilde{X}$ definiert durch

$$O \subset \tilde{X} \text{ ist offen} \quad \Longleftrightarrow \quad p^{-1}(O) \subset X \text{ ist offen.}$$

Zeigen Sie:

i) Die Quotiententopologie ist die maximale Topologie auf $\tilde{X}$, bezüglich der p stetig ist.

ii) Die Quotiententopologie ist die einzige Topologie auf $\tilde{X}$, so daß
   - p stetig ist und
   - für jede Abbildung $f\colon \tilde{X} \to Z$ auf $\tilde{X}$ mit Werten in einem topologischen Raum Z gilt:

$$f \text{ ist stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad f \circ p \text{ ist stetig.}$$

iii) Es gibt $p\colon X \to \tilde{X}$, so daß X Hausdorff ist, aber die Quotiententopologie auf $\tilde{X}$ nicht Hausdorff ist.

Aufgabe 7. Gegeben topologische Räume X_1 und X_2, so ist die *Produkttopologie* auf

$$X_1 \times X_2$$

die Topologie mit der Basis $\{O_1 \times O_2 \mid O_i \subset X_i \text{ offen}\}$. Zeigen Sie:

i) Die Produkttopologie ist die kleinste Topologie, bezüglich der die beiden Projektionen $\pi_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1$, 2 stetig sind.

ii) Die Produkttopologie ist die einzige Topologie auf $X_1 \times X_2$, so daß
   - die Projektionen $\pi_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1$, 2 stetig sind und
   - für jede Abbildung $f\colon Z \to X_1 \times X_2$ von einem topologischen Raum Z nach $X_1 \times X_2$ gilt:

$$f \text{ ist stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_i \circ f, i = 1, 2 \text{ sind stetig.}$$

iii) Sind X_1, X_2 Hausdorff, so ist $X_1 \times X_2$ Hausdorff.