Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2018

Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 2

Jonas Ziefle 23. Oktober 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 2. November vor der Übung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Erklären Sie, wie man

$$S^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + ... + x_n^2 = 1\}$$

mittels stereographischer Projektionen zu einer Mannigfaltigkeit machen kann. Zeigen Sie, daß die vom Atlas induzierte Topologie gleich der Teilraumtopologie ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß der projektive Raum $\mathbb{KP}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ durch die Karten

$$\varphi_i \colon \{[x_0 : ... : x_n] \mid x_i \neq 0\} \to \mathbb{K}^n \qquad [x_0 : ... : x_n] \mapsto (x_0/x_i, ..., \widehat{x_i/x_i}, ..., x_n/x_i),$$

$i = 0, ..., n$ zu einer Mannigfaltigkeiten wird. Zeigen Sie, daß die vom Atlas induzierte Topologie gleich der Quotiententopologie (aus Aufgabe 4 von Blatt 1) ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) Der Begriff "zulässige Karte" ist unabhängig vom Repräsentanten einer differenzierbaren Struktur.
b) "Äquivalenz" von Atlanten ist wirklich eine Äquivalenzrelation.
c) Die Menge aller zulässigen Karten bezüglich eines differenzierbaren Atlasses $\mathcal{A}$ bildet selbst einen Atlas, und zwar den *maximalen Atlas*, der zu $\mathcal{A}$ äquivalent ist. Jeder andere zu $\mathcal{A}$ äquivalente Atlas ist in diesem Atlas enthalten.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{A}$ ein differenzierbarer Atlas auf einer Menge M. Zeigen Sie:

a) Die offenen Mengen bezüglich $\mathcal{A}$ erfüllen die Axiome einer Topologie.
b) Kartengebiete sind offen und Kartenabbildungen sind Homöomorphismen.
c) Die induzierte Topologie ist die einzige Topologie, bezüglich der die Kartengebiete offen und die Kartenabbildungen Homöomorphismen sind.

Übungsaufgaben (für das 2. Tutorium)

Aufgabe 5.
a) Die Dimension ist auf jeder Zusammenhangskomponente eines lokal euklidischen Raumes konstant. (Benutzen Sie den Satz von der Invarianz der Dimension.)
b) Ein lokal euklidischer Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 6. Sei $\mathcal{A}$ ein differenzierbarer Atlas auf einer Menge M. Zeigen Sie:

a) Das Kartengebiet jeder zulässigen Karte ist offen.
b) Eine Menge, die bezüglich $\mathcal{A}$ offen ist, ist auch bezüglich eines äquivalenten Atlasses $\mathcal{B}$ offen. (Insbesondere hängt die induzierte Topologie nur von der Äquivalenzklasse von Atlanten ab.)

Aufgabe 7. Zulässige Karten einer Mannigfaltigkeit M von Dimension n sind genau Diffeomorphismen von offenen Teilmengen $U \subset M$ auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, daß die durch eine differenzierbare Struktur induzierte Topologie genau dann eine abzählbare Basis besitzt, wenn sie durch einen abzählbaren Atlas repräsentiert werden kann.