Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 3

Jonas Ziefle

30. Oktober 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 8. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^2$?

- a) $\{e^{it} = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$,
- b) $\{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$,
- c) $\{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \cup \{(0, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$,
- d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
- e) $\{(\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-\pi/2, \pi/2)\}$
- f) $\{(\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-\pi/2, \pi)\}$

Aufgabe 2. Warum ist

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1|, |x_2|, |x_3| \leq 1 \text{ und } |x_i| = 1 \text{ für mindestens ein } i\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$? Was ist die minimale Teilmenge $M' \subset M$, so daß $M \setminus M'$ eine Untermannigfaltigkeit ist? Kann man auf M eine mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie verträgliche differenzierbare Struktur definieren?

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß

$$\{P \in \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid P^* = P, P^2 = P, \text{tr}(P) = 1\}$$

eine Untermannigfaltigkeit und diffeomorph zu $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die Menge $U(2)$ der unitären Matrizen eine Untermannigfaltigkeit von $Gl(2, \mathbb{C})$ ist. Zeigen Sie weiter, daß die Menge der speziellen unitären Matrizen $SU(2)$ eine Untermannigfaltigkeit von $U(2)$ ist.

Übungsaufgabe (für das 3. Tutorium)

Aufgabe 5. Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom von Grad ≥ 1 . Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$z \in \mathbb{C} \rightarrow p(z) \in \mathbb{C}$$

sich zu einer holomorphen Abbildung von $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ nach $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ fortsetzen läßt. Zeigen Sie, daß das Bild dieser Abbildung offen und abgeschlossen ist. Folgern Sie den Fundamentalsatz der Algebra.