Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2018

Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 4

Jonas Ziefle 6. November 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 15. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $q \in \mathbb{R}^N \backslash M$. Nimmt die Funktion $x \mapsto \|x - q\|$ im Punkt $p \in M$ ihr Minimum auf M an, so steht $p - q$ senkrecht auf T_pM.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

i) $G = SL(n, \mathbb{R})$ und $G = O(n)$ sind Untermannigfaltigkeiten von $Gl(n, \mathbb{R})$.
ii) Links– bzw. Rechts–Multiplikation mit einem Element $g \in G$ wirken als Diffeomorphismen $L_g, R_g \colon G \to G$.
iii) Der Tangentialraum T_eG im Punkt $e \in G$ ist gleich der Menge der spurfreien Matrizen (für $G = SL(n, \mathbb{R})$) bzw. der Menge der schiefsymmetrischen Matrizen (für $G = O(n)$).
iv) Es gilt
$$T_gG = g \cdot T_eG = T_eG \cdot g.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^4 + z^4 = 1\}$$
eine Untermannigfaltigkeit ist. Geben Sie eine Karte bei $p = (0, 0, 1) \in M$ an. Bestimmen Sie eine lineare Gleichung für T_pM.

(Freiwillig) Zeigen Sie, daß M diffeomorph zu S^2 ist. (Hier kann der Satz über die Umkehrabbildung für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten nützlich sein.)

Aufgabe 4. Sei $TM = \dot\cup_{p \in M} T_pM$ die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume einer Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie,

i) daß jeder Atlas $\mathcal{A}$ von M wie folgt einen Atlas auf TM definiert: für $(U, \varphi = (x_1, ..., x_n)) \in \mathcal{A}$ definiere
$$\Phi \colon TM_{|U} \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \quad \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \mapsto (\varphi(p), v_1, ..., v_n),$$
wobei $TM_{|U} = \dot\cup_{p \in U} T_pM$ und $\frac{\partial}{\partial x_1}(p)$, ..., $\frac{\partial}{\partial x_n}(p)$ die durch (U, φ) definierte Gaussbasis von T_pM bezeichnet,
ii) daß TM mit diesem Atlas zu einer Mannigfaltigkeit wird,
iii) daß die Projektion $\pi \colon TM \to M$, die jeden Tangentialvektor $X \in T_pM$ auf seinen Fußpunkt p abbildet, eine Submersion ist und
iv) daß Vektorfelder genau die glatten Abbildungen $X \colon M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$ sind.