Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2018

Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 7

Jonas Ziefle 27. November 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 6. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Gegeben eine kovariante Ableitung ∇ auf den Vektorfeldern $\mathfrak{X}(M)$ einer Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, daß

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

für X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ in beiden Eingängen $C^\infty(M)$–linear ist. Folgern Sie, daß der Wert von $T(X,Y)$ im Punkt $p \in M$ nur von $X_{|p}$ und $Y_{|p}$ abhängt.

Aufgabe 2. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß

$$\nabla_X Y = (d_X Y)^T$$

einen metrischen und torsionsfreien Zusammenhang definiert. (Zum Nachweis der Torsionsfreiheit setzen Sie die Vektorfelder lokal auf den umgebenden Raum fort und benutzen Sie die Natürlichkeit der Lieklammer aus Aufgabe 2 auf Blatt 5.)

Aufgabe 3. Beweisen Sie

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}\right) g^{lk},$$

wobei (g^{lk}) die zu (g_{ij}) inverse Matrix bezeichnet.

Aufgabe 4. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\tilde{g} = e^{2u} g$ mit $u \colon M \to \mathbb{R}$ glatt. Zeige Sie, daß für die zugehörigen Levi–Civita–Zusammenhänge gilt

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + du(X)Y + du(Y)X - g(X,Y) \operatorname{grad} u,$$

wobei $\operatorname{grad}(u)$ das Vektorfeld bezeichnet, welches eingesetzt in die Metrik g die Ableitung du von u ergibt.