Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2018

# Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 8

Jonas Ziefle 4. Dezember 2018

**Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 13. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.**

**Aufgabe 1.** Es soll die Existenz einer Partition der Eins zu einer gegebenen offenen Überdeckung $V_\alpha$, $\alpha \in I$ einer Mannigfaltigkeit $M$ gezeigt werden.

i) Zeigen Sie die Aussage für kompaktes $M$.
ii) Zeigen Sie, daß jede Mannigfaltigkeit eine Familie offener Mengen $G_i$, $i \in \mathbb{N}$ besitzt mit der Eigenschaft, daß für alle $i$ gilt

$$\bar{G}_i \text{ kompakt} \qquad \text{und} \qquad \bar{G}_i \subset G_{i+1}.$$

(Wählen Sie dafür zuerst eine abzählbare Basis der Topologie bestehend aus offenen Menge, deren Abschluß jeweils kompakt ist.)
iii) Wählen Sie für jedes $i$ eine endliche Überdeckung von $\bar{G}_{i+1} \backslash G_i$ durch Mengen der Familie $V_\alpha$, $\alpha \in I$. Bilden Sie eine lokal endliche Überdeckung von $M$, indem Sie die Mengen dieser Überdeckungen der $\bar{G}_{i+1} \backslash G_i$ jeweils mit $G_{i+2} \backslash \bar{G}_{i-1}$ schneiden (wobei $G_0 = \emptyset$ gesetzt wird).
iv) Beweisen Sie die Aussage für allgemeines $M$.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, daß jede Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik besitzt. Zeigen Sie, daß es auf jeder Mannigfaltigkeit ein nicht–triviales Vektorfeld gibt.

**Aufgabe 3.** Sei $E \to M$ ein reelles Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit $M$. Zeigen Sie, daß der Raum $\Gamma(E)$ der Schnitte von $E$ ein reeller Vektorraum und ein Modul über dem Ring $C^\infty(M, \mathbb{R})$ der glatten Funktionen auf $M$ ist (wobei Addition und Produkt punktweise definiert sind).

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, daß

$$\Sigma_{\mathbb{RP}^n} = \{(p, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in p\}$$

mit $\pi\colon \Sigma_{\mathbb{RP}^n} \to \mathbb{RP}^n$, $(p, v) \to p$ ein Linienbündel, das *tautologische Bündel* von $\mathbb{RP}^n$, ist. Ist $\Sigma_{\mathbb{RP}^1}$ trivial?