
Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 9

Jonas Ziefle

11. Dezember 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 20. Dezember vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer offenen Überdeckung U_α , $\alpha \in A$. Zeigen Sie, daß eine Familie

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_r(\mathbb{K})$$

glatter Abbildungen, die die Kozykelbedingungen erfüllt, ein bis auf Isomorphie eindeutiges \mathbb{K} -Vektorbündel über M definiert, für das es lokale Trivialisierungen mit diesen Kozykeln gibt.

Aufgabe 2. Gegeben seien zwei Basen (e_1, \dots, e_n) und (f_1, \dots, f_n) eines Vektorraumes V .

- a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix zwischen den dazu dualen Basen (e_1^*, \dots, e_n^*) und (f_1^*, \dots, f_n^*) aus der Basiswechselmatrix zwischen (e_1, \dots, e_n) und (f_1, \dots, f_n) .
- b) Bestimmen Sie analog die Basiswechselmatrix zwischen den Determinanten $e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ und $f_1^* \wedge \dots \wedge f_n^*$ auf V , welche bezüglich (e_1, \dots, e_n) bzw. (f_1, \dots, f_n) normiert sind.

Aufgabe 3. Eine *Bündelmetrik* auf einem reellen Vektorbündel E ist ein Schnitt

$$h \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$$

(oft auch mit $\langle \cdot \rangle$ bezeichnet), welcher in jedem Punkt eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf der entsprechenden Faser definiert. Zeigen Sie, daß $O(n)$ -wertige Kozykel ein Bündel mit Bündelmetrik definieren. Umgekehrt kann man ein Bündel mit einer Metrik immer so trivialisieren, daß die Kozykel Werte in $O(n)$ annehmen. Zeigen Sie, daß jedes Bündel eine Metrik besitzt (Tip: Partition der Eins) und damit durch $O(n)$ -Kozykel dargestellt werden kann. (Was bedeutet es, wenn ein Bündel durch $SO(n)$ -wertige Kozykel dargestellt werden kann?)

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Isomorphieklassen von reellen Linienbündeln über S^1 . (Wählen Sie eine Bündelmetrik. Dann ist ein Schnitt von Länge eins entweder global definiert, oder kommt verdreht an, wenn man einmal rum geht...)