
Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 10

Jonas Zieffle

18. Dezember 2018

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 10. Januar vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß eine kovariante Ableitung $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ ein lokaler Operator ist und daher auf offene Mengen eingeschränkt werden kann.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß jedes Vektorbündel $E \rightarrow M$ eine kovariante Ableitung besitzt (Tip: Partition der Eins). Zeigen Sie weiter, daß die Menge der Zusammenhänge auf $E \rightarrow M$ einen affinen Raum über dem Vektorraum

$$\Omega^1(M, \text{End}(E)) = \Gamma(T^*M \otimes \text{End}(E))$$

bildet, wobei $\text{End}(E) = E^* \otimes E$.

Aufgabe 3. Ein Zusammenhang ∇ auf einem reellen Vektorbündel E mit einer Bündelmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird als *metrisch* bezeichnet, wenn

$$d \langle \varphi, \psi \rangle = \langle \nabla \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \nabla \psi \rangle.$$

Zeigen Sie:

- Ein Zusammenhang ist genau dann metrisch, wenn die Zusammenhangsformen bezüglich orthonormaler Rahmen schiefsymmetrisch sind.
- Jedes Vektorbündel mit Bündelmetrik besitzt einen metrischen Zusammenhang.
- Die metrischen Zusammenhänge auf $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bilden einen affinen Raum über dem Vektorraum der 1-Formen mit Werten in den schiefsymmetrischen Endomorphismen von E .

Aufgabe 4. Sei $E = U \times \mathbb{K}^r$ das triviale Rank r Vektorbündel auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Ein Zusammenhang auf E ist gegeben durch eine Zusammenhangsform (bezüglich des trivialen Rahmens)

$$\omega = - \sum_{i=1}^n A_i dx_i$$

mit $A_i \in C^\infty(U, \text{Mat}(r \times r, \mathbb{K}))$. Zeigen Sie, daß wenn es einen parallelen Rahmen gibt, d.h. eine Lösung $\Phi \in \Gamma(U, GL_r(\mathbb{K}))$ von

$$\nabla \Phi = d\Phi + \omega \Phi = 0,$$

notwendigerweise die Gleichung

$$d\omega + \omega \wedge \omega = 0,$$

bzw. äquivalent

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A_j - \frac{\partial}{\partial x_j} A_i = [A_i, A_j]$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, erfüllt ist. (Diese Gleichungen nennt man auch Nullkrümmungsbedingungen. Wir werden sehen, daß Sie für einfach zusammenhängendes U nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind.)