Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2018

Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 12

Jonas Ziefle 15. Januar 2019

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 24. Januar vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇. Sei ω die Zusammenhangsform bezüglich eines lokalen Rahmens $\underline{s}$, d.h. $\nabla \underline{s} = \underline{s}\omega$. Dann ist die Krümmungsform bezüglich des Rahmens $d\omega + \omega \wedge \omega$, d.h. es gilt

$$\mathcal{R}^{\nabla}\underline{s} = \underline{s}(d\omega + \omega \wedge \omega).$$

Aufgabe 2. Seien E und F Vektorbündel mit Zusammenhang über M.

a) Es gibt eindeutige Zusammenhänge auf E^* und $E \otimes F$ mit

$$< \nabla\alpha, \varphi >= d < \alpha, \varphi > - < \alpha, \nabla\varphi >$$

und

$$\nabla(\varphi \otimes \psi) = (\nabla\varphi \otimes \psi) + (\varphi \otimes \nabla\psi)$$

für alle $\varphi \in \Gamma(E)$, $\psi \in \Gamma(F)$ und $\alpha \in \Gamma(E^*)$.

b) Was ist die Krümmung dieser Zusammenhänge auf E^* und $E \otimes F$?

c) Was ist die Krümmung des Zusammenhangs auf $\mathrm{End}(E) = E^* \otimes E$?

Aufgabe 3. Sei $\omega \in \Omega^1(U, Mat_{r\times r}(\mathbb{K}))$ eine matrixwertige 1–Form auf einem Quader $U \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß es genau dann eine Funktion

$$f\colon U \to GL_r(\mathbb{K}) \qquad \text{mit} \qquad f^{-1}df = \omega$$

gibt, wenn

$$d\omega + \omega \wedge \omega = 0.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

a) Eine Isometrie zwischen zwei Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist ein affiner Diffeomorphismus.

b) Ein affiner Diffeomorphismus erhält
   - Krümmung,
   - Paralleltransport und
   - Geodätische.

   (Zeigen Sie eine der drei Behauptungen.)