Geometrie von Mannigfaltigkeiten : Übungsblatt 13

Jonas Ziefle 22. Januar 2019

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 31. Januar vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 1. Sei γ eine reguläre Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Dann ist γ genau dann eine Prägeodätische (d.h. eine Kurve, deren Umparametrisierung auf Bogenlänge eine Geodätische ist), wenn gilt $\nabla_{\gamma'}\gamma' \| \gamma'$.

Aufgabe 2. Seien f und h Isometrien einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Zeigen Sie: wenn für einen Punkt p gilt $f(p) = h(p)$ und $df_p = dh_p$, dann gilt $f \equiv h$. (Tip: Zeigen Sie zuerst ein lokales Resultat über die Exponentialabbildung.)

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) $SO(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit der $(n \times n)$–Matrizen. Was ist der Tangentialraum in Id?
b) Ist X eine schiefsymmetrische Matrix, so ist die Kurve $\gamma(t) = \exp(tX)$ eine Geodätische von $SO(n)$ bezüglich der induzierten Metrik.

(Tip: die Euklidische Metrik auf den $n \times n$–Matrizen ist $\langle A, B\rangle = tr(A^T B)$. Die Gruppe $SO(n)$ wirkt auf den $n \times n$–Matrizen von links und rechts als Gruppe von Isometrien. Bestimmen Sie den Normalenraum an $SO(n)$ im Punkt Id. Bestimmen Sie den Tangential– und Normalenraum an $SO(n)$ in einem Punkt $G \in SO(n)$. Folgern Sie, daß $\gamma''(t)$ im Normalenraum an $SO(n)$ im Punkt $\gamma(t)$ liegt.)

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe sollen die Isometrien und Geodätischen der hyperbolischen Halbebene

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \qquad g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

bestimmt werden. Zeigen Sie:

a) Alle orientierungserhaltenden Isometrien von H^2 sind von der Form
$$\begin{bmatrix} z = x + iy \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto A \begin{bmatrix} z = x + iy \\ 1 \end{bmatrix}$$
für ein $A \in SL(2, \mathbb{R})$. (Benutzen Sie dazu Aufgabe 2.)
b) Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der y–Achse ist entlang des zwischen den zwei Punkten liegenden Geradenstückes.
c) Parametrisieren Sie den positiven Teil der y–Achse so, daß sie mit konstanter hyperbolischer Geschwindigkeit durchlaufen wird.
c) Die Geodätischen der hyperbolischen Ebene sind genau die mit konstanter hyperbolischer Geschwindigkeit parametrisierten Halbkreise bzw. Halbgeraden, die den Rand des hyperbolischen Raumes senkrecht schneiden.