Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2019

Geometry of Manifolds II : Exercise Sheet 1

Jonas Ziefle 18. April 2019

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 25. April vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Zweierabgaben sind erlaubt. Bitte bei der ersten Abgabe Matrikelnummer(n) angeben.

Aufgabe 1. How does the volume form

$$\omega^2 = dx \wedge dy$$

of $\mathbb{R}^2$ look with respect to polar coordinates? How does the volume form

$$\omega^3 = dx \wedge dy \wedge dz$$

of $\mathbb{R}^3$ look with respect to spherical and cylindrical coordinates?

Aufgabe 2. Show that

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \ldots, X_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_k)) \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_k) \end{aligned}$$

for $\omega \in \Omega^k(M)$ and $X_0, \ldots, X_k \in \Gamma(TM)$.

Aufgabe 3. Prove that

$$d^M(f^*\omega) = f^*(d^N\omega)$$

for $f\colon M \to N$ and $\omega \in \Omega^k(N)$.

Aufgabe 4. Show that

$$\omega = 2xz\, dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\, dx \wedge dy.$$

satisfies $d\omega = 0$ and find a 1–Form η on $\mathbb{R}^3$ with $\omega = d\eta$.