
Geometry of Manifolds II : Exercise Sheet 8

Jonas Ziefle

4. June 2019

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 20. Juni vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Zweierabgaben sind erlaubt. Bitte bei der ersten Abgabe Matrikelnummer(n) angeben.

Aufgabe 1. Determine the arclength parametrized plane curve with curvature

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

(Hint: using $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ one can write $T(s) = e^{i\beta(s)}$. Then $\kappa(s) = \beta'(s)$.)

Aufgabe 2. Let $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a curve parametrized by arclength. Show that

- a) γ takes values in an affine plane if and only if its complex curvature with respect to a parallel frame takes values in a real line through the origin.
- b) γ takes values in a sphere of radius $R > 0$ if and only if its complex curvature with respect to a parallel frame takes values in a real line with distance $1/R$ to the origin.

Aufgabe 3. An arclength parametrized Frenet curve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ with constant curvature and torsion is a segment of a circle or a helix.

Aufgabe 4. A connected immersed surface $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is totally umbilic, i.e. its principal curvatures κ_1, κ_2 coincide everywhere, if and only if its image is contained in a plane or a sphere.