Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2019

Geometry of Manifolds II : Exercise Sheet 9

Jonas Ziefle 25. June 2019

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 4. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Zweierabgaben sind erlaubt. Bitte bei der ersten Abgabe Matrikelnummer(n) angeben.

Aufgabe 1. Prove that for a connection ∇ on a splitted bundle $E = E_1 \oplus E_2$ we have

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla^1 & \alpha \\ \beta & \nabla^2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{R}^\nabla = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^{\nabla^1} + \alpha \wedge \beta & d^\nabla \alpha \\ d^\nabla \beta & \mathcal{R}^{\nabla^2} + \beta \wedge \alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Assume a splitted bundle $E = E_1 \oplus E_2$ is equipped with a bundle metric for which the decomposition is orthogonal. Prove that a connection ∇ on E is metric if and only if the connections ∇^1 and ∇^2 are metric and $\alpha_X = -\beta_X^*$ for all $X \in TM$.

Aufgabe 3. Use the Gauss equation to prove that the unit sphere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ has sectional curvature $K = 1$ for any $p \in S^n$ and all 2–planes in T_pS^n, where the sectional curvature of the 2–plane spanned by orthonormal vectors $X, Y \in T_pS^n$ is defined as

$$K =< \mathcal{R}_{X,Y}Y, X >$$

for $\mathcal{R}$ the Riemann curvature tensor of S^n with respect to the induced metric.

Aufgabe 4. Deduce the Theorema Egregium for immersions $f\colon M^2 \to \mathbb{R}^3$ from the Gauss equation.