Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen SS 2019

Geometry of Manifolds II : Exercise Sheet 11

Jonas Ziefle 9. Juli 2019

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 18. Juli vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Zweierabgaben sind erlaubt. Bitte bei der ersten Abgabe Matrikelnummer(n) angeben.

Aufgabe 1. Show that, with respect to coordinates obtained using stereographic projection, the metric on $H^n(R)$ takes the form

$$g = \frac{4}{(1 + K\|X\|^2)^2}(dx_1^2 + ... + dx_n^2)$$

with $K = -\frac{1}{R^2}$.

Aufgabe 2. Show that all isometries (i.e., diffeomorphisms compatible with the respective metrics) of the model spaces are of the form given in the lecture.

Aufgabe 3. Show that geodesics in the Poincare ball model / half space model are precisely the constant speed parametrizations of circular arcs and lines segments that intersect the boundary orthogonally.

Aufgabe 4. Let $\gamma\colon [a, b] \to M$ be a piecewise smooth curve in a Riemannian manifold that connects two points p and q and realizes their distance, i.e.

$$L(\gamma) = d(p, q).$$

Show that

a) all restrictions of γ to subintervals $[c, d] \subset [a, b]$ realize distance and
b) γ is smooth.