Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2019/20

Geometry of Manifolds/Geometry in Physics
Exercise Sheet 2

Jonas Ziefle 22. Oktober 2019

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 31. Oktober vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Zweierabgaben sind erlaubt. Bitte bei der ersten Abgabe Matrikelnummer(n) angeben.

Aufgabe 1. Show that the stereographic projections φ_N, φ_S define a differentiable atlas on

$$S^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + ... + x_n^2 = 1\}$$

which turns S^n into a differentiable manifold. Show that the topology induced by the atlas equals the subspace topology.

Aufgabe 2. Show that the atlas consisting of the charts

$$\varphi_i \colon \{[x_0 : ... : x_n] \mid x_i \neq 0\} \to \mathbb{K}^n \qquad [x_0 : ... : x_n] \mapsto (x_0/x_i, ..., \widehat{x_i/x_i}, ..., x_n/x_i),$$

$i = 0, ..., n$ turns the projective space $\mathbb{KP}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ into a manifold. Show that its manifold topology equals the quotient topology (from Exercise 4 on Sheet 1).

Aufgabe 3. Which of the following sets are submanifolds of $\mathbb{R}^2$?

a) $\{e^{it} = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$,
b) $\{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$,
c) $\{(t, \sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\} \cup \{(0, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$,
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
e) $\{(\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-\pi/2, \pi/2)\}$
f) $\{(\cos(t), \sin(2t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (-\pi/2, \pi)\}$

Aufgabe 4. Show that the set of unitary matrices $U(2)$ is a submanifold of $Gl(2, \mathbb{C})$. Furthermore, show that the set of special unitary matrices $SU(2)$ is a submanifold of $U(2)$.