Prof. Dr. Christoph Bohle Tübingen WS 2019/20

Geometry of Manifolds/Geometry in Physics
Exercise Sheet 6

Jonas Ziefle 19. November 2019

Diese Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am 28. November vor der Vorlesung abzugeben. Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Zweierabgaben sind erlaubt. Bitte bei der ersten Abgabe Matrikelnummer(n) angeben.

Aufgabe 1. Compute the commutator $[V, W]$ of the vectorfields

$$V = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}$$

and

$$W = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

on $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Represent V and W with respect to polar coordinates

$$(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Aufgabe 2. Let $f\colon M \to N$ be a smooth map between manifolds. If X, Y are vectorfields on M and $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ vectorfields on N such that $df_p(X_p) = \tilde{X}_{f(p)}$ and $df_p(Y_p) = \tilde{Y}_{f(p)}$ for all $p \in M$, then

$$df_p([X,Y]_p) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{f(p)} \qquad \text{for all } p \in M.$$

Aufgabe 3. Given an affine connection ∇ on a manifold M, show that

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

with X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ is $C^\infty(M)$–linear in both slots. Conclude that the value of $T(X,Y)$ at a point $p \in M$ depends only on $X_{|p}$ and $Y_{|p}$.

Aufgabe 4. Prove that the Christoffel symbols of the Levi–Civita connection are given by

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_l \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}\right) g^{lk},$$

where (g^{lk}) is the matrix inverse to (g_{ij}).