Tübingen, den 17.12.2001 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

**ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I**

B l a t t 10

---

Abgabe am Montag, den 7.1.2002, in der Vorlesung

---

## Aufgabe 28

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $X \in \mathbb{K}^{r\times r}$ eine nilpotente Matrix, d.h. $X^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. [Die Matrixpotenzen seien induktiv durch $X^0 = E_r$, $X^{n+1} = XX^n$ definiert]. Man zeige:

1. Die Matrix $A := \sum_{k=0}^{\infty} X^k$ (fast alle Summanden verschwinden!) ist invertierbar und $A^{-1} = E_r - X$.
2. Ist $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) = 0$, so ist die Matrix $\mathsf{exp}(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$ invertierbar und $\mathsf{exp}(X)^{-1} = \mathsf{exp}(-X)$.

## Aufgabe 29

1. Man bestimme den Rang der Matrix $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ für

   (i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (ii) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (iii) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, (iv) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$.

2. Für $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bestimme die Matrizen

   $C := ABA^{-1}$ und $C^{16}$ explizit.

## Aufgabe 30

Es seien $V, W$ Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $r \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Man zeige:

1. Die folgenden Aussagen sind für jede lineare Abbildung $F : V \to W$ äquivalent:
   (i) $\mathsf{rang}(F) \leq r$.
   (ii) Es gibt lineare Abbildungen $G : V \to \mathbb{K}^r$ und $H : \mathbb{K}^r \to W$ mit $F = H \circ G$.

2. Wie muß die Bedingung (ii) modifiziert werden, wenn (i) durch "$\mathsf{rang}(F) = r$" ersetzt wird?

3. Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ vom Rang $\leq r$ existieren Matrizen $B \in \mathbb{K}^{m\times r}$ und $C \in \mathbb{K}^{r\times n}$ mit $A = BC$.

Die letzte Aussage kann auch so formuliert werden, daß durch $(B, C) \mapsto BC$ eine surjektive Abbildung $\Psi : \mathbb{K}^{m\times r} \times \mathbb{K}^{r\times n} \to \mathbb{K}^{m\times n}$ definiert wird.

4.* Man zeige für alle $B \in \mathbb{K}^{m\times r}$ und $C \in \mathbb{K}^{r\times n}$

$$\Psi^{-1}\big(\Psi(B, C)\big) = \big\{\big(BQ^{-1}, QC\big) : Q \in \mathsf{GL}(r, \mathbb{K})\big\}\,.$$