Tübingen, den 21.1.2002 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

B l a t t 13

Abgabe am Montag, den 28.1.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 37

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper.

1. Man bestimme die Determinante der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 4} .$$

2. Unter Verwendung von 1. gebe man eine notwendige und hinreichende Bedingung an den Körper $\mathbb{K}$ an, daß J invertierbar ist.

Aufgabe 38

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze

$$\Delta_n := \det \begin{pmatrix} x_0 & 1 & & & & \\ -1 & x_1 & 1 & & 0 & \\ & -1 & x_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & -1 & x_{n-1} & 1 \\ & & & & -1 & x_n \end{pmatrix} .$$

Man zeige die Rekursionsformel

$$\Delta_n = x_n \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

und gebe Δ_4 explizit an.

Aufgabe 39

Es seien $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und

$$A := \begin{pmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ a & a & \cdots & a & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} .$$

Man berechne $\det(A)$ und gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß A invertierbar ist. [Hinweis: Addiere zur ersten Spalte alle übrigen].