Tübingen, den 28.1.2002 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

B l a t t 14

Abgabe am Montag, den 4.2.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 40

Auf einem Rechner sei ein Verfahren installiert, das für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ihre Determinante berechnet. Dabei werden Additionen und Subtraktionen kostenlos ausgeführt, Multiplikationen und Divisionen kosten jeweils einen Cent. Man gebe eine möglichst kleine Zahl c_n so an, daß jede Determinantenberechnung nicht mehr als c_n Cent kostet, wobei

1. das Verfahren durch Auswertung der Definition der Determinante als Summe über alle Permutationen gegeben ist,
2. das Verfahren durch Transformation der Matrix auf Dreiecksgestalt vermöge elementarer Zeilentransformationen gegeben ist.
3. Wie billig könnte nach obiger Gebührenordnung die Determinantenberechnung sein, falls $\mathbb{R}$ durch den Körper $\mathbb{Z}_2$ ersetzt wird und ein geeignetes Verfahren benutzt wird?

Aufgabe 41

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}, \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}.$$

1. Man bestimme eine partikuläre Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.
2. Man bestimme eine Basis des Lösungsraums L des zugehörigen homogenen Systems und damit die Menge aller Lösungen von $Ax = b$.

Aufgabe 42

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest. Man bestimme die Menge aller Lösungen über $\mathbb{R}$ des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= \alpha \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= \alpha^2 . \end{aligned}$$

Zur Erinnerung

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) .$$