Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
14. Oktober 2019

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (de Morgansche Regeln)
Sei M eine Menge und $N_1, N_2 \subseteq M$ Teilmengen von M. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $(N_1 \cup N_2)^{\mathrm{C}} = N_1^{\mathrm{C}} \cap N_2^{\mathrm{C}}$.

(ii) $(N_1 \cap N_2)^{\mathrm{C}} = N_1^{\mathrm{C}} \cup N_2^{\mathrm{C}}$.

Aufgabe 2 (geordnete Paare)
Seien M_1 und M_2 Mengen und $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$. Ein geordnetes Paar (x_1, x_2) wird üblicherweise als die Teilmenge

$$\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \subseteq \mathcal{P}(M_1 \cup M_2)$$

definiert. Zeigen Sie, dass daraus die folgende charakteristische Eigenschaft folgt: Für $x_1, x_1' \in M_1$ und $x_2, x_2' \in M_2$ gilt

$$(x_1, x_2) = (x_1', x_2') \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_1' \text{ und } x_2 = x_2'.$$

Aufgabe 3 (Konstruktion der ganzen Zahlen)
In dieser Aufgabe werden die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen mit ihrer Addition und ihrer Ordnung $<$ als bekannt vorausgesetzt.

(i) Sei $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ via

$$(m, n) \sim (r, s) \quad :\Longleftrightarrow \quad m + s = n + r$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist.

(ii) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\bar{n} := [(n+1, 1)] \in \mathbb{Z}, -\bar{n} := [(1, n+1)] \in \mathbb{Z}$, außerdem $0 := [(1,1)] \in \mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z} := {}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}/_{\sim}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass jedes Element $z \in \mathbb{Z}$ durch genau eines dieser Elemente gegeben ist,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -\bar{3}, -\bar{2}, -\bar{1}, 0, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots\}.$$

Aufgabe 4 (Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen)
In dieser Aufgabe werden die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zusammen mit ihrer Addition $+$ und ihrer Multiplikation $\cdot$ als bekannt vorausgesetzt.

(i) Betrachte auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) \quad :\Longleftrightarrow \quad ad = bc.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Wir notieren eine Äquivalenzklasse von $\sim$ aus (i) mit $\frac{a}{b} := [(a,b)] \in \mathbb{Q}$, wobei $\mathbb{Q} := {}^{(\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))}/_{\sim}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$$

wohldefiniert sind.

Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am **Montag, den 21.10.2019** *in der Pause der Vorlesung ab!*