Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
16. Dezember 2019

# Übungsblatt 10

**Aufgabe 35 (Häufungspunkte)**
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl $c$ genau dann Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder gibt, die im Intervall $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ liegen.

**Aufgabe 36 (Stetigkeit von Verkettung, Produkten und Quotienten stetiger Funktionen)**

(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Invervall, $x_0 \in I$ sowie $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

  (a) Sind $f$ und $g$ stetig in $x_0$, so auch $f \cdot g$.

  (b) Ist $g(x_0) \neq 0$ und $g$ stetig in $x_0$, so existiert ein $\delta > 0$, so dass $g(x) \neq 0$ ist, für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Ist zudem $f$ stetig in $x_0$, so dann auch $\frac{f}{g}\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ in $x_0$.

(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$. Sei weiter $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $y_0 \in J$, $f(I) \subset J$ und $f(x_0) = y_0$. Zeigen Sie: Ist $f$ stetig in $x_0$ und $g$ stetig in $y_0$, so ist auch $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0$.

**Aufgabe 37 (Wurzelkriterium)**

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $q \in [0, 1)$. Es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ ist, für alle $n \geq n_0$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

(iii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}.$$

**Aufgabe 38 (Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen)**
Wir setzen in dieser Aufgabe den Körper der rationalen Zahlen voraus (vgl. Aufgabe 14).

(i) Wir nennen zwei *rationale Cauchy-Folgen* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *äquivalent*, wenn ihre Differenzenfolge $(s_n - r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{CF} := \{(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge mit $r_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$ definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass für zwei rationale Cauchy-Folgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Summenfolge $(r_n + s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Produktfolge $(r_n \cdot s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind. Auf $\mathbb{R} := {}^{\mathrm{CF}}/_{\sim}$ setzen wir dann

$$[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(r_n + s_n)_{n\in\mathbb{N}}], \qquad [(r_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(r_n \cdot s_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind.

(iii) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

*Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am* **Mittwoch, den 08.01.2020** *in der Pause der Vorlesung ab!*