

Übungsblatt 11

Aufgabe 39

Sei $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d. h. es existiert ein $\xi \in [0, 1]$ mit $f(\xi) = \xi$.

Aufgabe 40

(i) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$. Zeigen Sie die Stetigkeit von f in $x_0 \in \mathbb{R}$, indem Sie ein $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ angeben, sodass gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 41

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\phi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi \leq f \leq \psi$ gibt, sodass gilt

$$\int_a^b (\psi - \phi) dx < \varepsilon.$$

Aufgabe 42

Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit $\int_a^b f dx = 0$. Zeigen Sie, dass $f = 0$ ist.