Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
12. Januar 2020

Übungsblatt 12

Aufgabe 43
Wir ändern die Nullfunktion auf $[0,1]$ an endlich vielen Stellen ab: Sei $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ paarweise verschieden und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} c_i, & \text{wenn } x = x_i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f integrierbar ist und

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} = 0$$

gilt.
Hinweis: Man kann annehmen, dass $n = 1$ und $c_1 = 1$ ist. Warum?

Aufgabe 44
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\xi \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass dann auch $f|_{[a,\xi]}$ und $f|_{[\xi,b]}$ integrierbar sind und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{dx} + \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

gilt.
(*Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 41.*)

Aufgabe 45
Sei $n \in \mathbb{N}$, $b > 1$ und $f\colon [1,b] \to \mathbb{R}\colon x \to x^n$.

(i) Für jedes $r \in \mathbb{N}$ sei $q_r := \sqrt[r]{b}$ und $Z^{(r)} = (x_0^{(r)}, \ldots, x_r^{(r)})$ eine Unterteilung von $[1,b]$ mit $x_k^{(r)} := q_r^k$ für $0 \leq k \leq r$. Weiter seien $\xi^{(r)} = (\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_r^{(r)})$ die Stützstellen mit $\xi_k^{(r)} = x_{k-1}^{(r)}$ für $1 \leq k \leq r$. Zeigen Sie, dass für die Riemannsche Summe $S_r := S(f, Z^{(r)}, \xi^{(r)})$ von f

$$S_r = \frac{b^{n+1} - 1}{\sum_{k=0}^n q_r^k}$$

gilt.

(*Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Summenformel.*)

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\int_1^b x^n\,\mathrm{dx} = \frac{b^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Aufgabe 46
Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^a \sqrt{x}\,\mathrm{dx} = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}$$

gilt.
(*Hinweis: Berechnen Sie jeweils für $b > 1$ und $b < 1$ das Integral $\int_0^b \sqrt{x}\,\mathrm{dx}$ mit der Methode aus Aufgabe 45, um dann $\int_{1/n}^a \sqrt{x}\,\mathrm{dx}$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.*)
Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am **Montag, den 20.01.2020** *in der Pause der Vorlesung ab!*