Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
15. Januar 2020

Übungsblatt 13

Aufgabe 47

(i) Sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

(ii) Sei $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist und für alle $x \in (0,\infty)$ gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 48
Sei $\varepsilon > 0$ und $h\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie:

(i) Erklärt man $f\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x \cdot h(x)$, so ist f stetig in $x_0 = 0$.

(ii) Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass f aus Teil (a) nicht notwendigerweise differenzierbar sein muss.

(iii) Erklärt man $g\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := x^2 \cdot h(x)$, so ist g differenzierbar in $x_0 = 0$.

Aufgabe 49 (Satz von Darboux)
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(i) Besitzt f in a ein lokales Minimum, so gilt $f'(a) \geq 0$. Besitzt f in b ein lokales Minimum, so gilt $f'(b) \leq 0$.

(ii) Gilt $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Vorsicht: f' ist im Allgemeinen nicht stetig.

Aufgabe 50 (Potenzen mit rationalen Exponenten)
Für alle $x \in \mathbb{R}$ setzt man $x^0 := 1$, für $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$ und für $x > 0$ und $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ setzt man

$$x^r := \sqrt[q]{x^p}.$$

(i) Zeigen Sie, dass dies wohldefiniert ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Potenzgesetze für alle $x > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gelten:

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s}, \qquad (x^r)^s = x^{rs}.$$

Hinweis: Prüfen Sie dies zunächst für $r, s \in \mathbb{N}$ und dann für $r, s \in \mathbb{Z}$.

Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am **Montag, den 27.01.2020** *in der Pause der Vorlesung ab!*