

Übungsblatt 14

Aufgabe 51 (Ableitung von Monomen negativen Grades)

Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $a < 0$, sowie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^a$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist mit

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1}.$$

Aufgabe 52 (Spezialfall der Regel von de l'Hôpital)

Sei $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und f differenzierbar in x für alle $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Der Grenzwert von $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) =: c$ existiere. Zeigen Sie, dass f auch in $x = 0$ differenzierbar ist und es gilt

$$f'(0) = c.$$

Aufgabe 53 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass gilt:

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $x \mapsto f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$.

Aufgabe 54

Berechnen Sie die Integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad \text{und} \quad \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$