Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
27. Januar 2020

Übungsblatt 15

Aufgabe 55 (Regel von l'Hôpital)
Seien für $\varepsilon > 0$ die Funktionen $f, g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ stetig, auf $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ differenzierbar und es sei $f(0) = g(0) = 0$. Sei weiter $g'(x) \neq 0$, für alle $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$, und der Grenzwert von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ für $x \to 0$ existiere. Zeigen Sie: Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ und auch der Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \to 0$ existiert. Außerdem gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Hinweis: Benutzen Sie den (verallgemeinerten) Mittelwertsatz.

Aufgabe 56 (Ableitung und Integration des Logarithmus)

(i) Begründen Sie, weshalb die Funktion

$$f\colon (1, \infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$$

differenzierbar ist und berechnen Sie dann ihre Ableitung.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Stammfunktion von $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und überprüfen Sie ihre Behauptung mittels Ableiten.

Aufgabe 57

(i) Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{und} \qquad g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (x + \ln(x))^7.$$

(ii) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion von

$$h\colon (1, \infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \qquad \text{und} \qquad k\colon \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Aufgabe 58 (Exponentialfunktion)

(i) Zeigen Sie, dass $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und gilt:

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty.$$

(ii) Zeigen Sie, dass $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, seine Umkehrung $\exp := \ln^{-1}\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ differenzierbar und es gilt

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Die Abgabe ist freiwillig! Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes bis zum **Mittwoch, den 05.02.2020** *bei ihrer Tutorin oder ihrem Tutor ab!*