Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
20. Oktober 2019

Übungsblatt 2

Aufgabe 5
Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(i) Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen $B \subseteq N$ gilt: $f^{-1}(B^{\mathrm{C}}) = (f^{-1}(B))^{\mathrm{C}}$.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für f mit einem $A \subseteq M$ an, sodass $f(A^{\mathrm{C}}) \neq (f(A))^{\mathrm{C}}$ gilt.

Aufgabe 6 (Universelle Eigenschaften)

(i) Seien M_1 und M_2 Mengen, $M := M_1 \times M_2$ ihr cartesisches Produkt und $\pi_j M \to M_j$ ihre kanonischen Projektionen (j = 1,2). Zeigen Sie: Ist N eine Menge und sind $g_j\colon N \to M_j$ Abbildungen (j = 1,2), so gibt es <u>genau eine</u> Abbildung $F\colon N \to M$ mit

$$\pi_1 \circ F = g_1 \qquad \text{und} \qquad \pi_2 \circ F = g_2.$$

(ii) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, $Q := {}^{M}\!/\!{\sim}$ die zugehörige Quotientenmenge sowie $\pi\colon M \to Q$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie: Ist N eine Menge und $g\colon M \to N$ eine Abbildung mit $g(x) = g(y)$, falls $x \sim y$ ist, so existiert genau eine Abbildung $F\colon Q \to N$ mit $F \circ \pi = g$.

Aufgabe 7 (Links- und Rechtsinverse)
Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Sei $M \neq \emptyset$. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon N \to M$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{Id}_M$.

(ii) Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon N \to M$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{Id}_N$.

Aufgabe 8
Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Sind f und g injektiv, so auch $g \circ f$.

(ii) Sind f und g surjektiv, so auch $g \circ f$.

(iii) Die Gleichmächtigkeit $\simeq$ auf der *Klasse aller Mengen* ist eine Äquivalenzrelation (mit der naheliegenden Erweiterung der Definition der Äquivalenzrelation).

Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am **Montag, den 28.10.2019** *in der Pause der Vorlesung ab!*