Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
24. Oktober 2019

# Übungsblatt 3

**Aufgabe 9 (mengentheoretische Summe)**
Seien $M$ und $N$ Mengen. Die *mengentheoretische Summe* $M+N$ (auch *Coprodukt* oder *disjunkte Vereinigung* genannt) ist durch

$$M + N \coloneqq (M \times \{1\}) \cup (N \times \{2\})$$

definiert. Außerdem definiert man die *kanonischen Injektionen* $\iota_M \colon M \hookrightarrow M+N$ und $\iota_N \colon N \hookrightarrow M+N$ durch $\iota_M(m) = (m,1)$ und $\iota_N(n) = (n,2)$. Zeigen Sie:

(i) Es ist $M + N = \iota_M(M) \mathbin{\dot\cup} \iota_N(N)$.

(ii) Das Coprodukt hat die folgende universelle Eigenschaft: Ist $(P, \alpha, \beta)$ ein Tripel bestehend aus einer Menge $P$ und zwei Abbildungen $\alpha \colon M \to P$, $\beta \colon N \to P$, so gibt es genau eine Abbildung $F : M + N \to P$ mit

$$F \circ \iota_M = \alpha \qquad \text{und} \qquad F \circ \iota_N = \beta.$$

**Aufgabe 10 (vollständige Induktion)**

(i) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$

gilt.

(ii) Aufgrund der obigen Formeln vermuten wir, dass es ein Polynom $p$ vierten Grades mit rationalen Koeffizienten und führendem Koeffizienten $1/4$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = p(n).$$

Können Sie die Vermutung beweisen?

*Hinweis: Es gilt* $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.

**Aufgabe 11**
Finden Sie den Fehler im Beweis des folgenden Satzes:

**Satz.** *Alle Hasen haben dieselbe Farbe.*[1]

*Beweis.* Da es nur endlich viele Hasen gibt, genügt es zu zeigen, dass in jeder endliche Ansammlung von Hasen alle Hasen dieselbe Farbe haben, was per vollständiger Induktion über die Anzahl der Hasen in der Ansammlung bewiesen wird.
Induktionsanfang: Für n = 1 besteht die Ansammlung nur aus einem Hase und damit haben alle Hasen in dieser Ansammlung dieselbe Farbe.
Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für n, d. h. in jeder Ansammlung von n Hasen haben alle Hasen dieselbe Farbe.
Induktionsschritt: Sei $\{H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}\}$ eine Ansammlung von n + 1 Hasen. Nach Induktionsvoraussetzung haben alle Hasen in $\{H_1, H_2, \ldots H_n\}$ dieselbe Farbe, insbesondere haben $H_1$ und $H_2$ dieselbe Farbe. Nach Induktionsvoraussetzung haben aber auch alle Hasen in $\{H_2, \ldots, H_{n+1}\}$ dieselbe Farbe, also die Farbe von $H_2$ und damit die Farbe von $H_1$. Daraus folgt, dass alle Hasen in $\{H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}\}$ dieselbe Farbe haben. □

[1] In Wirklichkeit variiert die Fellfärbung von Hasen übrigens meist von weiß über grau bis bräunlich.

**Aufgabe 12 (Hilberts Hotel)**
Hilberts Hotel besitzt abzählbar unendlich viele Zimmer, welche durch die natürlichen Zahlen 1, 2, ... nummeriert sind und die im Moment alle belegt sind. Kommt nun ein weiterer Gast, so kann dieser untergebracht werden, indem jeder bisherige Gast in das Zimmer mit der nächst höheren Nummer wechselt, d. h. der bisherige Gast aus Zimmer 1 zieht in Zimmer 2, der bisherige Gast aus Zimmer 2 zieht in Zimmer 3, usw. So hat jeder der alten Gäste weiterhin ein Zimmer und der neue Gast kann nun in das frei gewordene Zimmer 1 ziehen. Wie kann man alle Gäste unterbringen, wenn

(i) ein Bus mit endlich vielen, neuen Gästen kommt?

(ii) ein Bus mit abzählbar-unendlich vielen, neuen Gästen kommt?

(iii) endlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen, neuen Gästen kommt?

(iv) abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen, neuen Gästen kommt?

*Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am* **Montag, den 04.11.2019** *in der Pause der Vorlesung ab!*