Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
5. November 2019

Übungsblatt 4

Aufgabe 13 (Fortsetzung Aufgabe 3)
Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als Menge von Äquivalenzklassen in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ wie in Aufgabe 3 und setzen nun für $a = [(m,n)]$ und $b = [(r,s)]$

$$a + b := [(m+r, n+s)], \quad a \cdot b := [(mr+ns, ms+nr)].$$

Zeigen Sie, dass

(i) die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$ auf $\mathbb{Z}$ wohldefiniert sind.

(ii) $(\mathbb{Z}, +)$ eine *abelsche Gruppe* ist.

(iii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein *Integritätsring* ist.

Aufgabe 14 (Fortsetzung von Aufgabe 4)
Wir betrachten $\mathbb{Q}$ als Menge von Äquivalenzklassen in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ wie Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(i) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

(ii) die Abbildung $\iota\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ mit $\iota(a) = \frac{a}{1}$ ist ein injektiver *Ringhomomorphismus*.

Aufgabe 15
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}\}$ wie aus der Vorlesung. Für $a = \bar{m}$ und $b = \bar{r}$ setzen wir

$$a + b := \overline{m+r}, \quad a \cdot b = \overline{mr}.$$

Zeigen Sie, dass

(i) die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$ wohldefiniert sind.

(ii) $(\mathbb{Z}_n, +)$ eine abelsche Gruppe und $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ein Ring ist.

(iii) $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, r \mapsto \bar{r}$ ein surjektiver Ringhomomorphismus ist.

(iv) Sei nun $n = p$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ein Körper ist (dieser wird häufig auch als $\mathbb{F}_p$ bezeichnet).

Aufgabe 16
Auf $\mathbb{Q}^2$ definieren wir eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ für $a = (r,s)$ und $b = (t,u)$ wie folgt:

$$a + b := (r+t, s+u), \quad a \cdot b := (rt - su, ru + st).$$

Zeigen Sie:

(i) $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper (den wir mit $\mathbb{Q}[i]$ bezeichnen).

(ii) Die Abbildung $\iota\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[i], \iota(r) = (r, 0)$ ist ein Körperhomomorphismus.

(iii) Wir setzen $i := (0,1) \in \mathbb{Q}[i]$. Zeigen Sie, dass man jedes Element $z \in \mathbb{Q}[i]$ eindeutig als $z = r + is$ schreiben kann, wobei wir $r, s \in \mathbb{Q}$ vermöge ι als ein Element in $\mathbb{Q}[i]$ betrachten. Zeigen Sie schließlich: $i^2 = -1$.

Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am **Montag, den 11.11.2019** *vor der Vorlesung in den* ***Briefkästen im C-Bau*** *ab!*