Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
27. November 2019

Übungsblatt 7

Aufgabe 20

(i) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{1}{2^n}$$
gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie für $\varepsilon = 10^{-3}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{2n^2 - n}{n^2 + 1}$$
gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie für $\varepsilon = 10^{-3}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n := (-1)^n$$
nicht konvergiert.

(iv) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n := (n^3 - n^2)$$
nicht konvergiert.

Aufgabe 24 (arithmetisch-geometrische Ungleichung)

(i) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt
$$ab \leq \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2.$$

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *babylonische Zahlenfolge* aus der Vorlesung, also
$$a_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$
Zeigen Sie, dass

(a) $a_n^2 \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, d. h. dass $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 25

Ordnen Sie die folgenden Folgen nach ihrem Wachstum und beweisen Sie ihre Behauptung.

(i)
$$a_n = n^k \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}, \qquad b_n = q^n \quad \text{mit } q > 1,$$
$$c_n = n^n, \qquad d_n = n!.$$

(ii)

$$w_n = (n!)!, \qquad x_n = (n^n)!,$$
$$y_n = n^{n!}, \qquad z_n = (n!)^n.$$

Aufgabe 26
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Zeigen Sie, dass es keine rationale Zahl x mit $x^k = p$ gibt.

Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am **Mittwoch, den 04.12.2019** *in der Pause der Vorlesung ab!*