Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
5. Dezember 2019

Übungsblatt 8

Aufgabe 27 (Cauchy-Kriterium)

(i) Zeigen Sie: Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

für alle $n > m \geq n_0$.

(ii) Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Zeigen Sie: Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.

Aufgabe 28 (Majorantenkriterium)

(i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin konvergiere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Zeigen Sie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Aufgabe 29 (Quotientenkriterium)

(i) Sei $0 < q < 1$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) und

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

Hinweis: Majorisieren Sie mit einer geometrischen Reihe.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 30 (b-adische Darstellung reeller Zahlen)

(i) Stellen Sie die Dezimalzahlen 13 und 24 im 7-er-System dar und addieren und multiplizieren Sie sie schriftlich.

(ii) Stellen Sie den Bruch $1/7$ als Dezimalbruch, als dyadischer und als 12-adischer Bruch dar.

Hinweis: Im 12*-er-System müssen Sie natürlich für die Dezimalzahlen* 10 *und* 11 *zwei neue Ziffern verwenden.*

Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am **Montag, den 09.12.2019** *in der Pause der Vorlesung ab!*