Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
8. Dezember 2019

Übungsblatt 9

Aufgabe 31
Zeigen Sie, dass die babylonische Folge eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 32 (Intervallschachtelung)
Eine *Intervallschachtelung* in $\mathbb{R}$ ist eine Folge beschränkter und abgeschlossener Intervalle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $I_{n+1} \subseteq I_n$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Eine Element $x \in \mathbb{R}$ heißt *Kern von* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Jede Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ hat einen Kern.

Aufgabe 33
Betrachten Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $y_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(i) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist.

Hinweis: Zeigen Sie dafür mit der Bernoullischen Ungleichung, dass $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ *und* $\frac{y_n}{y_{n+1}} > 1$ *gilt.*

(ii) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Aufgabe 34 (Quotientenkriterium II)

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: q < 1.$$

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

(ii) Zeigen Sie die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am **Montag, den 16.12.2019** *in der Pause der Vorlesung ab!*


Liebe Mathematiker,
ihr seid wieder
♥-lich eingeladen
zu unserer
WEIHNACHTSFEIER
bei Glühwein und Waffeln
am 17.12 um 18:30 im N14/N16
Eure Fachschaft Mathe
PS: Bringt gerne eure eigenen Tassen mit!