Fachbereich Mathematik
Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
8. Februar 2020

Test zu Analysis 1/Klausur zu Mathematik für Physiker 1

Name: Matrikelnummer:

Vorname: Studiengang:

Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und beschriften dieses mit ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer. Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. In jeder Aufgabe können bis zu 8 Punkte erreicht werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	**Summe**
Punkte							

Aufgabe 1 (4 + 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, mit Hilfe vollständiger Induktion, für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

(b) Seien M, N Mengen und $f\colon M \to N$ eine Abbildung sowie $g_1, g_2\colon N \to M$ Abbildungen mit $g_1 \circ f = \mathrm{Id}_M$ und $f \circ g_2 = \mathrm{Id}_N$. Zeigen Sie:

$$g_1 = g_2.$$

Aufgabe 2 (4 + 4 Punkte)
Auf $\mathbb{Q}^2$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation für $a = (r,s) \in \mathbb{Q}^2$ und $b = (t,u) \in \mathbb{Q}^2$:

$$a + b := (r+t, s+u), \qquad a \cdot b := (rt + 2su, ru + st).$$

(a) Zeigen Sie, dass das Distributivgesetz,

$$(a+b)\cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}^2$ gilt und dass $\mathbb{K} := (\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ ein Null- und ein Einselement hat.

(b) Wir fassen $\mathbb{Q}$ vermöge $\iota\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{K}, r \mapsto \iota(r) := (r, 0)$, als Unterkörper von $\mathbb{K}$ auf. Begründen Sie, dass für $(r,s) \neq 0$ in $\mathbb{K}$ zunächst $r^2 - 2s^2 \neq 0$ in $\mathbb{Q}$ ist, und zeigen Sie dann, dass $\left(\frac{r}{r^2-2s^2}, \frac{-s}{r^2-2s^2}\right)$ invers zu (r,s) ist. Zeigen Sie schließlich für $\sqrt{2} := (0,1)$:

$$(\sqrt{2})^2 = 2.$$

Aufgabe 3 (4 + 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ konvergiert.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 4 (4 + 2 + 2 Punkte)

(a) Sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ stetig. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [0,1]$ gibt mit $f(\xi) = \xi^2$.

(b) (i) Geben Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ an, die unbeschränkt ist, und begründen Sie.

(ii) Geben Sie ein Beispiel einer beschränkten, stetigen Funktion $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ an, die ihr Supremum nicht annimmt, und begründen Sie.

Aufgabe 5 (4 + 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion ist, so ist f affin-linear.

(b) Zeigen Sie mittels Differenzialquotient, dass die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ differenzierbar ist und für die Ableitung gilt:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 6 (4 + 4 Punkte)

(a) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig und ungerade, d. h. : es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-1,1]$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

sein muss.

(b) Berechnen Sie, die Integrale

$$\int_{-1}^{1} (x^7 + 4x^3)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{3}^{8} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x.$$

Viel Erfolg!