Mathematisches Institut
Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose
Tim Binz
Dominik Edelmann

Wintersemester 2019/20
Analysis I / Mathematik
für Physiker I
13. Dezember 2019

Weihnachtsblatt

Weihnachtsaufgabe
Wir betrachten die *Leibnizsche Reihe* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Reihe konvergiert.

(ii) Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Ist $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, so nennt man $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ *eine Umordnung von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. (Man vertauscht damit „nur“ die Summanden.) Zeigen Sie: Ist $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl, so gibt es eine Umordnung, die gegen c konvergiert,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(n)+1}}{\tau(n)} = c.$$

(*Bei absolut konvergenten Reihen passiert so etwas nicht: Ist eine Reihe absolut konvergent, so konvergieren alle Umordnungen gegen den selben Grenzwert.*)

Für den ersten Teil der Aufgabe erhalten Sie bis zu ***4 Bonuspunkten****, für den zweite Teil bis zu* ***12 Bonuspunkten****. Darüber hinaus wird die „schönste Lösung“ mit* ***einem Buch*** *prämiert.*

Frohe Weihnachten!

Bitte geben Sie Ihre Lösung des Übungsblattes am **Mittwoch, den 08.01.2020** *in der Pause der Vorlesung ab!*