Kohomologische Darstellungen

Anton Deitmar

Inhaltsverzeichnis

1 Definitionen

Es seien

F Zahlkoerper mit genau einer komplexen Stelle

$\mathcal{O}$ Ganzzahlring

D Quaternionenalgebra $/F$, die an keiner reellen Stelle zerfaellt.

S Menge aller Stellen v, so dass D_v nicht zerfaellt.

Λ Maximalordnung in D, eindeutig bis auf Konjugation

$\Sigma \supset S_{\text{fin}}$ eine endliche Menge endlicher Stellen

$K_\Sigma = \prod_{v<\infty} K_{\Sigma,v}$, wobei

$$K_{\Sigma,v} = \begin{cases} \mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}_2) & v \notin \Sigma, \\ \left\{ g \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \mod \pi_v \right\} & v \in \Sigma \setminus S, \\ (1 + \mathfrak{m}_v)F_v^\times / F_v^\times & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\mathfrak{m}_v$ das eindeutig bestimmte maximale Ideal von Λ_v

$Cl(F) \quad = \left\{ \text{Ideale von } \mathcal{O}_F \right\} / \text{Isomorphie als } \mathcal{O}_F\text{-Moduln}$

Sind I, J solche Ideale mit $I \cong J$, dann gibt es ein $\alpha \in F^\times$, so dass $J = \alpha I$.

Definiere in diesem Fall

$$I \sim J \quad \Leftrightarrow \quad \det(\alpha_v) > 0 \text{ fuer jede reelle Stelle } v.$$

Sei dann

$$CL^{+}(F) = \{\text{Ideale}\}/\sim$$

die **Idealklassengruppe im engeren Sinn**.

Der Raum

$$Y(\Sigma) = G_F \backslash G_{\mathbb{A}} / K_\Sigma K_\infty$$

ist eine disjunkte Vereinigung von Quotienten von 3-dimensionalen Hyperbolischen Raeumen. Ihre Anzahl ist

$$|\pi_o(Y(\Sigma))| = \left| Cl^{+}(F)/Cl^{+}(F)^2 \right|.$$

2 Kongruenzhomologie

Γ Kongruenzgruppe, also $\Gamma = G_F \cap K$ fuer eine kompakte offene $F \subset G_{\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}}$.

$\widehat{\Gamma}$ Kongruenzvervollstaendigung

= Abschluss in G_{fin}

= $\varprojlim_N \Gamma/N$, wobei der Limes ueber alle normalen Kongruenzuntergruppen laeuft

Definition 2.1. Ist nun
$$Y(\Sigma) = \bigsqcup_{i \in E} \Gamma_i \backslash \mathbb{H}^3,$$
dann definieren wir die **Kongruenzhomologie** als
$$H_{1,\mathrm{cong}}(Y(\Sigma), A) = \mathrm{im}\left(\bigoplus_i H_1(\Gamma_i, A) \to \bigoplus_i H_1(\widehat{\Gamma}_i, A) \right).$$

Definition 2.2. Wir sagen, dass in eine abelschen Gruppe M die Zahl 2 **invertierbar** ist, wenn die Multiplikation mit 2, also $x \mapsto 2x$ invertierbar, also ein Automorphismus ist.

Beispiele sind Koerper der Charakteristik $\neq 2$, oder $\mathbb{Z}_p$ sowie $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ fuer eine ungerade Primzahl p.

Lemma 2.3. *Ist* 2 *in* A *invertierbar, dann ist die Abbildung in Definition 2.1 surjektiv. D.h., dann gilt*
$$H_{1,\mathrm{cong}}(Y(\Sigma), A) = \bigoplus_i H_1(\widehat{\Gamma}_i, A).$$

Proof. Nach dem Universellen Koeffizientensatz habven wir ein exaktes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(\Gamma,\mathbb{Z})\otimes A & \longrightarrow & H_1(\Gamma,A) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1(H_0(\Gamma,Z),A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_1(\widehat{\Gamma},\mathbb{Z})\otimes A & \longrightarrow & H_1(\widehat{\Gamma},A) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1(H_0(\widehat{\Gamma},Z),A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die H_0-Terme sind jeweils gleich $\mathbb{Z}$, und daher sind die Tor-Terme Null. Es reicht also, zu zeigen, dass die Abbildung

$$\underbrace{H_1(\Gamma,\mathbb{Z})}_{\Gamma_{\mathrm{ab}}}\otimes A \to \underbrace{H_1(\widehat{\Gamma},\mathbb{Z})}_{\widehat{\Gamma}_{\mathrm{ab}}}\otimes A$$

surjektiv ist. Sei $N \subset \Gamma$ eine normale Kongruenzuntergruppe und $\widehat{N}$ ihr Abschluss in $\widehat{\Gamma}$. Dann liefert die Inklusion $\Gamma \hookrightarrow \widehat{\Gamma}$ einen Isomorphismus $\Gamma/N \cong \widehat{\Gamma}/\widehat{N}$. Mit Hilfe der Grothendieck-Spektralsequenz fuer Homologie stellt man fest, dass die behauptete Surjektivitaet genau dann fuer Γ stimmt, wenn sie fuer N stimmt. Man kann sich also auf den Fall der maximalen Gruppe $\Gamma = G_F \cap K$ mit $K = \prod_{v<\infty} K_v$ mit maximalem K_v zurueckziehen.

Sei

$$K_v^{(1)} = \begin{cases} K_v \cap \mathrm{SL}_2(F_v)F_v^\times/F_v^\times & D_v \text{ split,} \\ K_v \cap D^1(F_v)F_v^\times/F_v^\times & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $K_v^{(1)}$ normal in K_v und $K_v/K_v^{(1)}$ ist isomorph zu $F_v^\times/(F_v^\times)^2$, eine endliche Gruppe vom Exponenten 2. Nach dem Whitehead-Lemma gilt

$$[\widehat{\Gamma},\widehat{\Gamma}] = \prod_v [K_v,K_v] = \prod_v K_v^{(1)} = \widehat{\Gamma}^{(1)}.$$

Demzufolge hat $\widehat{\Gamma}_{\mathrm{ab}} = \widehat{\Gamma}/[\widehat{\Gamma}, \widehat{\Gamma}]$ Eponent 2, also ist $\widehat{\Gamma}_{\mathrm{ab}} \otimes A$ gleich Null. □

Bemerkung 2.4. Die Kongruenzhomologie ist der groesste Quotient, in dem die Homologie fuer hinreichend grosse
Kongruenz-Ueberlagerungen verschwindet, d.h.:

$$H_{1,\mathrm{cong}}(Y(K), A) = \operatorname{coker}\left(\varprojlim_{K'} H_1(Y(K'), A) \to H_1(Y(K), A) \right).$$

3 Die PSL-Variante

Sei $K = \prod_{v<\infty} K_v$ eine kompakte-offene Untergruppe von $G_{\mathbb{A}_{\text{fin}}}$. Sei

$$K_v^{(1)} = \begin{cases} K_v \cap \mathrm{SL}_2(F_v)F_v^\times/F_v^\times & D_v \text{ split,} \\ K_v \cap D^1(F_v)F_v^\times/F_v^\times & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $K_v^{(1)}$ normal in K_v und $K_v/K_v^{(1)}$ ist isomorph zu eine Untergruppe von $F_v^\times/(F_v^\times)^2$, eine endliche Gruppe vom Exponenten 2.

Lemma 3.1. *Sei M eine abelsche Gruppe, in der 2 invertierbar ist. Fuer jede Primzahl $p \neq 2$ liefert die Inklusion $K_v^{(1)} \hookrightarrow K_v$ Isomorphismen*

$$\phi : H_1(K_v^{(1)}, M) \xrightarrow{\cong} H_1(K_v, M)$$

und

$$H^1(K_v, M) \xrightarrow{\cong} H^1(K_v^{(1)}, M)$$

(Jede Gruppe ist "p-convenient".)

Beweis. Der Universelle Koeffizientensatz liefert

$$H_1(K_v, M) \cong \Big(H_1(K_v, \mathbb{Z}) \otimes M\Big) \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}_1(H_0(K_v, M))}_{0}$$

und dasselbe fur $K_v^{(1)}$. Es reicht also, zu zeigen, dass die Abbildung

$$\phi : \underbrace{H_1(K_v^{(1)}, \mathbb{Z}) \otimes M}_{K_{v,\mathrm{ab}}^{(1)} \otimes M} \to \underbrace{H_1(K_v, \mathbb{Z}) \otimes M}_{K_{v,\mathrm{ab}} \otimes M}$$

ein Isomorphismus ist. Man kann Sei $\eta : M \to M$ die Inverse zur

2-Multiplikation, also ein Automorphismus, fuer den $2\eta(m) = m$ fuer jedes $m \in M$ gilt. Sei dann $\psi : K_{v,\mathrm{ab}} \otimes M \to K^{(1)}_{v,\mathrm{ab}} \otimes M$. Da $K_v/K_v^{(1)}$ abelsch ist, folgt $[K_v, K_v] \subset K_v^{(1)}$ und damit ist $K_{v,\mathrm{ab}}/K^{(1)}_{v,\mathrm{ab}} \cong K_v/K_v^{(1)}$ eine Gruppe vom Exponenten 2. Wir schreiben $K_{v,\mathrm{ab}}$ additiv (wegen des Tensorproduktes) und folgern $2K_{v,\mathrm{ab}} \subset K^{(1)}_{v,\mathrm{ab}}$. Sei dann $\psi : K_{v,\mathrm{ab}} \otimes M \to K^{(1)}_{v,\mathrm{ab}} \otimes M$ definiert durch

$$\psi(k \otimes m) = 2k \otimes \eta(m).$$

Dann ist ψ eine Inverse zu ϕ. Die Aussage ueber die Homologie ist gezeigt.

Der Universelle Koeffizientensatz der Kohomologie liefert ein exaktes und kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\overbrace{H_0(K_v, \mathbb{Z})}^{\mathbb{Z}}, M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^1(K_v, M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(H_1(K_v, \mathbb{Z}), M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\underbrace{H_0(K_v^{(1)}, \mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}}, M) \arrow[r] & H^1(K_v^{(1)}, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_1(K_v^{(1)}, \mathbb{Z}), M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nach dem 5-er Lemma ist dann auch der mittlere Pfeil ein Isomorphismus. □

Bemerkung 3.2. Sei $\overline{G_F}$ der Abschluss von G_F in $G_{\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}}$. Dann ist die Menge

$$Y(K)^\wedge = \overline{G_F} \backslash G_{\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}} / K$$

endlich und ihre Kardinalitaet ist

$$|Y(K)^\wedge| = |\pi_0(Y(K))|.$$

Sind $g_1, \dots, g_s$ Vertreter von $Y(K)^\wedge$, dann gilt

$$\begin{aligned} H^1_{\mathrm{cong}}(Y(K), A) &= \bigoplus_{j=1}^{s} H^1(g_j K \widehat{g_j^{-1} \cap} G_F, A) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{s} H^1(g_j K g_j^{-1} \cap \overline{G_F}, A). \end{aligned}$$

Die Autoren behaupten nun, dass

$$gKg^{-1} \cap \overline{G_F} = g\Big(K \cap \overline{G_F}\Big)g^{-1}.$$

Glaubt man dies und schreibt $K^+ = K \cap \overline{G_F}$, dann induziert die Abbildung $x \mapsto gxg^{-1}$ einen Isomorphismus

$$H^1(K^+, A) \cong H^1(gK^+g, A),$$

da A ein trivialer Modul ist. Hieraus ergibt sich

$$H^1_{\mathrm{cong}}(Y(K), A) \cong \mathrm{Abb}\Big(\overline{G_F} \backslash G_{\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}} / K, H^1(K^+, A)\Big).$$

4 Eisenstein-Klassen

Sei wieder
$$T_\Sigma = \left\langle T_q : q \notin \Sigma \right\rangle$$
die Σ-Hecke-Algebra und sei $\mathfrak{m} \subset T_\Sigma$ ein maximales Ideal. $\mathfrak{m}$ heisst ein **Eisenstein-Ideal**, falls es Charaktere gibt
$$\psi_1, \psi_2 : \mathbb{A}^\times / F^\times \to \left(T_\Sigma / \mathfrak{m}\right)^\times,$$
so dass
$$T_q \equiv \psi_1(q) + \psi_2(q) \mod \mathfrak{m}$$
fuer fast alle q gilt. Die Autoren behaupten, dass wenn
$$\mathfrak{m} \supset \ker\left(T_\Sigma \to \mathrm{End}(H^1_{\mathrm{cong}}(Y(\Sigma), \mathbb{Z})\right),$$
dann ist $\mathfrak{m}$ ein Eisenstein-Ideal. Dies ist mir nicht nachvollziehbar, da insbesondere eine $G_{\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}}$-Aktion benutzt wurde, die nicht wohldefiniert erscheint.

5 Automorphe Darstellungen

Sei (π, V_π) eine unitaere Darstellung von $G_\mathbb{A}$. Fuer eine Stelle v schreibe $G_\mathbb{A} = G_v \times G^v$, wobei $G^v = \prod_{w \neq v} G_w$. Dann gilt $\pi \cong \pi_v \otimes \pi^v$ mit $\pi_v \in \widehat{G_v}$ und $\pi^v \in \widehat{G^v}$.

Fakt: Fuer fast alle v ist π_v **unverzweigt**, d.h., hat Fixpunkt unter der maximal kompakten K_v. Dann ist der Fixraum $V_{\pi_v}^{K_v}$ eindimensional. Sei E_0 die endliche Menge aller verzweigten Stellen v. Fuer jedes $q \notin E_0$ waehle einen Vektor $\alpha_q \in V_{\pi_q}^{K_q}$ von Norm 1. Sei $E \supset E_0$ eine endliche Stellenmenge und sei $q \notin E$. Die Isometrie

$$\bigotimes_{v \in E} V_{\pi_v} \to \bigotimes_{v \in E \cup \{q\}} V_{\pi_v},$$

gegeben durch

$$v \mapsto v \otimes \alpha_q$$

wird die Strukturabbildung fuer den Limes

$$\bigotimes_v V_{\pi_v} := \varinjlim_{E \supset E_0} \bigotimes_{v \in E} V_{\pi_v}$$

Auf diesem Raum definiert $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ eine unitaere Darstellung. Der **Tensorproduktsatz** besagt, dass jede unitaere Darstellung π von $G_\mathbb{A}$ ein solches Produkt mit eindeutig bestimmten Faktoren π_v ist.

Eine **automorphe Darstellung** von $G_\mathbb{A}$ ist eine irreduzible Unterdarstellung π von $L^2(G_F \backslash G_\mathbb{A})$. Schreibe

$$\pi = \bigotimes_v \pi_v = \pi_{\text{fin}} \otimes \pi_\infty.$$

Die Darstellung π heisst **kohomologisch**, falls die relative Lie-Algebra-Kohomologie

$$H^*(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty)$$

$\neq 0$ ist. Die relative Lie-Algebren-Kohomologie entsteht, wenn man fuer eine kokompakte diskrete Untergruppe $\Gamma \subset G_\infty$ die Zerlegung

$$L^2(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G_\infty}} N_\Gamma(\pi)\pi$$

auf den de-Rham Kopmplex $\Omega^k(\Gamma\backslash G/K_\infty)$ anwendet:

$$H^k_{dR}(\Gamma\backslash G_\infty/K_\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\pi \in \widehat{G_\infty}} m(\pi) H^k(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi).$$

Definition 5.1. **Neuformen** sind solche Homologieklassen oder Kohomologieklassen von $Y(\Sigma)$, die nicht schon fuer ein kleineres Σ' auftreten. Genauer

$$H_1(\Sigma, A)^{\mathrm{new}} := \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{q \in \Sigma \setminus S} H_1(\Sigma \setminus q, A)^2 \xrightarrow{\psi^\vee} H_1(\Sigma, A) \right)$$

und

$$H^1(\Sigma, A)^{\mathrm{new}} := \ker\left(H^1(\Sigma, A) \xrightarrow{\psi^\vee} \bigoplus_{q \in \Sigma \setminus S} H^1(\Sigma \setminus q, A)^2 \right).$$

6 Der Cheeger-Müller-Satz

Sei M eine glatte kompakte Mannigfaligkeit und S eine Triangulierung, d.h., M wird als endlicher Simplizialkomplex S dargestellt. Man erhaelt den Komplex $C(S, \mathbb{R})$ der simplizialen Kohomologie:

$$\dots \to C^{n-1}(S, \mathbb{R}) \xrightarrow{d^{n-1}} C^n(S, \mathbb{R}) \xrightarrow{d^n} C^{n+1}(S, \mathbb{R}) \to \dots$$

Dies ist ein endlich-dimensionaler Komplex von $\mathbb{R}$-Vektorraeumen. Ist S' eine Verfeinerung von S, dann wird $C(S, \mathbb{R}) \subset C(S', \mathbb{R})$ ein Subkomplex mit gleicher Kohomologie.

Die n-dimensionalen Simplizes bilden eine Basis des Raums $C^n(S, \mathbb{R})$. Man installiert ein Skalarprodukt auf $C^n = C^n(S, \mathbb{R})$ indem man diese zu einer ONB macht. Sei $d^{n*} : C^{n+1} \to C^n$ der adjungierte zu d^n und sei

$$\Delta^n = \Delta^n(S) : C^n \to C^n,$$
$$\Delta^n = d^{n+1*} d^n + d^{n-1} d^{n*}$$

der **Laplace-Operator**. Mit etwas Linearer Algebra stellt man fest, dass die Inklusion $\ker(\Delta^n) \hookrightarrow C^n(S, \mathbb{R})$ einen linearen Isomorphismus

$$\ker\left(\Delta^n\right) \xrightarrow{\cong} H^n(S, \mathbb{R})$$

induziert. Seien $b_j = \dim H^j(S, \mathbb{R})$ die Betti-Zahlen und seien $0 < \lambda_1^n \leq \dots \leq \lambda_{k(n)}^n$ die restlichen Eigenwerte von Δ^n mit Vielfachheiten gezaehlt. Sei dann $\operatorname{Spec}(S)$ die Familie $(s_{i,j})_{i,j\geq 0}$, wobei

$$s_{i,j} = s_{i,j}(S) = \begin{cases} b_j & i = 0, \\ \lambda_i^j & 1 \leq i \leq k(j), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 6.1 (Reidemeister)**.** *Die einzigen Invarianten von* $\operatorname{Spec}(S)$*, die sich bei Verfeinerung nicht aendern, sind die Betti-Zahlen und die* **Reidemeister-Torsion**

$$\mathcal{T}(S) = \prod_{j\geq 0} \det{}'(\Delta^j)^{j(-1)^j}.$$

Hierbei ist $\det'$ *das Produkt der Eigenwerte* $\neq 0$.

Als Invariante gilt hier jede formale Potenzreihe P *in* $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *Variablen, in die man die Werte von* $\operatorname{Spec}(S)$ *einsetzen kann und fuer die gilt* $P(S) = P(S')$ *fuer jede Verfeinerung* S' *jeder Triangulierung jeder kompakten glatten Mannigfaltigkeit.*

Die Aussage des Satzes ist so zu lesen, dass jede Invariante durch die angegebenen faktorisiert.

Da je zwei Triangulierungen eine gemeinsame Verfeinerung besitzen, ist $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(M)$ nicht von S abhaengig.

Bekanntlich gilt

$$b_j(S) = b_{j,dR},$$

wobei die rechte Seite die Betti-Zahl der de Rham Kohomologie ist.

Satz 6.2 (Cheeger, Müller)**.** *Die Reidemeister-Torsion stimmt mit der analytischen Torsion ueberein:*

$$\mathcal{T}(M) = \mathcal{T}_{an}(M).$$

Hierbei ist

$$\mathcal{T}_{an} = \prod_{j \geq 0} \det{}' \left(\Delta^j_{dR}\right)^{j(-1)^j}$$

und $\det'$ *ist die* **regularisierte Determinante**.

Seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte $\neq 0$ eines Operators D, dann sei

$$\zeta_D(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s}$$

die **Zeta-Funktion** zu D. Konvergiert diese und setzt sie eindeutig holomorph nach $s = 0$ fort, dann definiert man

$$\det{}'(D) = \exp(\zeta_D'(0)).$$

Im endlich-dimensionalen Fall kommt die uebliche Determinante heraus.

Fakt: Die Determinanten sind alle > 0 und viele Autoren bevorzugen die **logarithmische Torsion**:

$$\tau(M) = \log(\mathcal{T}(M)) = \sum_{j \geq 0} j(-1)^j \log\left(\det{}'\left(\Delta^j\right)\right)$$