Süd-West-Arithmetik-Seminar
Freiburg-Karlsruhe-Tübingen
Freitag, 22. Mai 2009

Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Susanne Mennecke

Die Manin-Vermutung für Fahnenvarietäten

1 Allgemeine Fragestellung

Sei X eine unendliche Menge und $h : X \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Abbildung, so dass

$$N(B) := \#\{x \in X | h(x) \leq B\} < \infty.$$

für jedes $B \in \mathbb{R}_{>0}$.

Wir wollen das asymptotische Verhalten von $N(B)$ für $B \to \infty$ bestimmen. Dazu betrachten wir die *Zetafunktion zu h*

$$Z_h(s) := \sum_{x \in X} h(x)^{-s}$$

Diese ist definiert für jede komplexe Zahl $s \in \mathbb{C}$, für die die Reihe absolut konvergiert.

Kennen wir die analytische Eigenschaften der Zetafunktion zu h, so können wir mit Hilfe des Taubertschen Satzes von Delange das asymptotische Verhalten von $N(B)$ für $B \to \infty$ bestimmen.

Für zwei Funktionen $A, B : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ schreiben wir

$$A(t) \sim B(t) :\Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{A(t)}{B(t)} = 1$$

Satz (Delange)**:** *Ist $Z_h(s)$ für $\operatorname{Re} s \geq a > 0$ holomorph mit Ausnahme eines k-fachen Pols mit Residuum c in $s = a$, so ist*

$$N(B) \sim \frac{c}{a \cdot k!} B^a (\log B)^{k-1}.$$

2 Die Höhe zu einem metrisierten Geradenbündel und die Höhenzetafunktion

Sei F eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Sei weiter M_F eine Menge von Bewertungen von F, die die üblichen Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ fortsetzen und für jedes $v \in M_F$ sei $|\cdot|_v := v(\cdot)$, so dass für alle $\lambda \in F$ die Produktformel $\prod_{v \in M_F} |\lambda|_v = 1$ erfüllt ist.

Im Folgenden sei X eine über F definierte projektive Varietät, L ein Geradenbündel über X und L_x die Faser von L im Punkt $x \in X$. Mit F_v wollen wir die Vervollständigung von F bezüglich $|\cdot|_v$ für ein nicht-triviales $v \in M_F$ bezeichnen.

Sei $x \in X(F_v)$. Wir wählen eine v-adische Norm $\|\cdot\|_v$ auf den F_v-Fasern L_x, so dass $\|\lambda w\|_v = |\lambda|_v \|w\|_v$ für alle $w \in L_x(F_v)$ und $\lambda \in F_v$ gilt. Diese wird *v-adische Metrik* auf L genannt, falls sie sich stetig mit $x \in X(F_v)$ verändert, d.h. falls für jeden Schnitt $s \in \Gamma(U, L)$, mit $U \subseteq X$ offen, die Abbildung

$$U(F_v) \to [0, \infty), \; x \mapsto \|s(x)\|_v$$

stetig bezüglich der v-adischen Topologie auf $U(F_v)$ ist.

Sei $\mathbb{L}$ nun ein *metrisiertes Geradenbündel* über X, das heißt ein System $(L, \|\cdot\|_v)$ bestehend aus einem Geradenbündel L über X und einer Familie von v-adischen Metriken auf L, $v \in M_F$.

Wir definieren die *Höhenfunktion*, oder kurz *Höhe*, zu $\mathbb{L}$ wie folgt. Sei $x \in X(F)$, U eine Umgebung von x und $s \in \Gamma(U, L)$ ein F-rationaler Schnitt mit $s(x) \neq 0$. Wir setzen

$$H_{\mathbb{L}}(x) := \prod_{v \in M_F} \|s(x)\|_v^{-1}.$$

Hierbei ist $H_{\mathbb{L}}$ wegen der Produktformel unabhängig von der Wahl von s.

Sei nun L ample. Wir setzen

$$N_X(\mathbb{L}, B) := \#\{x \in X(F) | H_{\mathbb{L}}(x) \leq B\}.$$

Es gilt $N_X(\mathbb{L}, B) < \infty$.

Unser Interesse besteht darin, das asymptotische Verhalten von $N_X(\mathbb{L}, B)$ für $B \to \infty$ zu bestimmen. Dazu betrachten wir die *Höhenzetafunktion*

$$Z_X(\mathbb{L}, s) = \sum_{x \in X(F)} H_{\mathbb{L}}(x)^{-s}.$$

Diese ist definiert für jede komplexe Zahl s, für die die Reihe absolut konvergiert.

Kennen wir nun die analytische Eigenschaften der Höhenzetafunktion, so können wir mit Hilfe des Satzes von Delange, §1, das asymptotische Verhalten von $N_X(\mathbb{L}, B)$ für $B \to \infty$ bestimmen.

Bemerkung: (a) Sei X eine über F definierte projektive Varietät, $\mathbb{L}_X, \mathbb{L}'_X$ zwei ample, metrisierte Geradenbündel über X. Dann ist auch $\mathbb{L}_X \otimes \mathbb{L}'_X$ ein amples metrisiertes Geradenbündel über X und für $x \in X$ gilt $H_{\mathbb{L}_X \otimes \mathbb{L}'_X}(x) = H_{\mathbb{L}_X}(x) H_{\mathbb{L}'_X}(x)$.

(b) Seien X, Y zwei über F definierte projektive Varietäten, $\mathbb{L}_X, \mathbb{L}_Y$ zwei ample, metrisierte Geradenbündel über X, bzw. Y, und $Z_X(\mathbb{L}_X, s)$ und $Z_Y(\mathbb{L}_Y, s)$ die zugehörigen Höhenzetafunktionen. Für $(x, y) \in X \times Y$ ist dann $H_{\mathbb{L}_X \times \mathbb{L}_Y}(x, y) = H_{\mathbb{L}_X}(x) H_{\mathbb{L}_Y}(y)$ und es gilt:

Sind $Z_X(\mathbb{L}_X, s)$ und $Z_Y(\mathbb{L}_Y, s)$ holomorph für $\operatorname{Re} s \geq a > 0$ mit Ausnahme eines k_X-fachen Pols mit Residuum c_X von $Z_X(\mathbb{L}_X, s)$, bzw. eines k_Y-fachen Pols mit Residuum c_Y von $Z_Y(\mathbb{L}_Y, s)$, in $s = a$, so ist

$$N_{X \times Y}(\mathbb{L}_X \times \mathbb{L}_Y, B) \sim \frac{c_X c_Y}{a \cdot (k_X + k_Y)!} B^a (\log B)^{k_X + k_Y - 1}.$$

Beispiele: (a) Sei $X = \mathbb{P}^n$, $M_{\mathbb{Q}}$ die Menge der üblichen Bewertungen auf $\mathbb{Q}$, d.h. der p- adischen Bewertungen $|\cdot|_p$ für jede Primzahl p und des gewöhnlichen Betrags $|\cdot|_\infty = |\cdot|$ auf $\mathbb{Q}$.

Wir wollen das Geradenbündel $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ betrachten. $\mathcal{O}(1)$ ist ample und $\Gamma(\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}), \mathcal{O}(1)) = \mathbb{Q}t_0 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}t_n$.

Sei $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ beliebig, mit homogenen Koordinaten $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ggT}_i(x_i) = 1$. Sei weiter $s \in \Gamma(\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}), \mathcal{O}(1))$ mit $s(x) \neq 0$. Wir schreiben $s_i(x) := \frac{x_i}{s(x)}$, für $i = 0, \ldots, n$ und setzen

$$\|s(x)\|_v := (\max_i |s_i(x)|_v)^{-1} \text{ für alle } v \in M_{\mathbb{Q}}.$$

Dies definiert eine Familie v-adischer Metriken auf $\mathcal{O}(1)$ und wir können die Höhenfunktion auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ bezüglich $(\mathcal{O}(1), \|\cdot\|_v)$ bestimmen. $H := H_{(\mathcal{O}(1), \|\cdot\|_v)}$ wird Standardhöhe auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ genannt. Es gilt

$$H(x) = \prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \|s(x)\|_v^{-1} = \max_i |x_i|.$$

Die zugehörige Höhenzetafunktion $Z_{\mathbb{P}^n}$ lässt sich für $\operatorname{Re} s > (n+1)$ berechnen zu

$$Z_{\mathbb{P}^n}(s) = \sum_{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})} H(x)^{-s} = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{\zeta(s-k)}{\zeta(s)}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} 2^k \binom{n+1}{k} & \text{falls } n \equiv k \pmod 2 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion ist.

$Z_{\mathbb{P}^n}(s)$ hat bei $s = n+1$ einen einfachen Pol mit Residuum $\frac{2^n(n+1)}{\zeta(n+1)}$ und konvergiert absolut für $\operatorname{Re} s > (n+1)$.
Mit dem Satz von Delange folgt für $N(B) := N_{\mathbb{P}^n}((\mathcal{O}(1), \|\cdot\|_v), B)$

$$N(B) \sim \frac{2^n}{\zeta(n+1)} B^{n+1}.$$

(b) Sei wieder $X = \mathbb{P}^n$, $M_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{O}(1)$ wie in (a).

Wir wollen nun $\mathcal{O}(1)$ auf eine andere Weise metrisieren.

Sei $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ beliebig, mit homogenen Koordinaten $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{ggT}_i(x_i) = 1$ und $s \in \Gamma(\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}), \mathcal{O}(1))$ mit $s(x) \neq 0$. Wir schreiben $s_i(x) := \frac{x_i}{s(x)}$, für $i = 0, \ldots, n$ und setzen

$$\widetilde{\|s(x)\|_v} := \begin{cases} (\max_i |s_i(x)|_v)^{-1} & \text{falls } v < \infty, \\ (\sqrt{\sum_i |s_i(x)|^2})^{-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auch dies definiert eine Familie v-adischer Metriken auf $\mathcal{O}(1)$ und wir können die Höhenfunktion $\widetilde{H}$ auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ bezüglich $(\mathcal{O}(1), \widetilde{\|\cdot\|_v})$ bestimmen. Es gilt

$$\widetilde{H}(x) = \prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \widetilde{\|s(x)\|_v}^{-1} = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}.$$

Für $n = 1$ und $\operatorname{Re} s > 2$ lässt sich auch hier die Höhenzetafunktion explizit berechnen zu

$$\widetilde{Z}_{\mathbb{P}^1}(s) = \sum_{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} \widetilde{H}(x)^{-s} = 2\frac{\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(\frac{s}{2})}{\zeta(s)},$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion und $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion zu $\mathbb{Q}(i)$ ist.

$\widetilde{Z}_{\mathbb{P}^1}(s)$ hat bei $s = 2$ einen einfachen Pol mit Residuum $\frac{\pi}{\zeta(2)}$ und konvergiert absolut für $\operatorname{Re} s > 2$. Mit dem Satz von Delange folgt für $\widetilde{N}(B) := N_{\mathbb{P}^1}((\mathcal{O}(1), \widetilde{\|\cdot\|_v}), B)$

$$\widetilde{N}(B) \sim \frac{\pi}{2\zeta(2)} B^2.$$

3 Fahnenvarietäten

Definition: Sei G eine über F definierte zusammenhängende halbeinfache lineare algebraische Gruppe und P eine parabolische Untergruppe von G. Der homogene Raum $P\backslash G$ wird *verallgemeinerte Fahnenvarietät* genannt.

Bemerkung: Verallgemeinerte Fahnenvarietäten X sind Fanovarietäten, d.h. glatte, projektive Varietäten, deren anti-kanonisches Geradenbündel ω_X^{-1} ample ist.

Beispiel: Sei V ein n-dimensionaler F-Vektorraum. Eine *Fahne* in V ist eine echt aufsteigende Kette $0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_k = V$ von Untervektorräumen von V. Eine *volle Fahne* ist eine Fahne mit $k = n = \dim V$, d.h. $\dim(V_{i+1}/V_i) = 1$. Die Menge aller vollen Fahnen wird mit $\mathcal{F}(V)$ bezeichnet und *Fahnenvarietät* genannt.

Sei $B := \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V und $U_i := \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_i)$. $0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_n = V$ heißt Standardfahne von V bezüglich der Basis B.

Die generelle lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, F)$ operiert transitiv auf $\mathcal{F}(V)$, weiter ist die Untergruppe der oberen Dreiecksmatritzen $\mathrm{T}(n, F)$ der Stabilisator der Standardfahne. Somit ist $\mathcal{F}(V) \cong \mathrm{T}(n, F)\backslash \mathrm{GL}(n, F)$, d.h. $\mathcal{F}$ trägt die Struktur einer verallgemeinerten Fahnenvarietät.

4 Die anti-kanonische Zetafunktion

4.1 Metrisierung eines Geradenbündels

Seien F, M_F wie bisher, $R := R_F$ der Ring der ganzen Zahlen in F, F_v (bzw. R_v) die Vervollständigungen von F (bzw. R) bezüglich $v \in M_v$. Im Folgenden sei G eine über F definierte zusammenhängende halbeinfache lineare algebraische Gruppe mit einer F-rationalen Boreluntergruppe P. Wir bezeichnen mit $X := P\backslash G$ die verallgemeinerte Fahnenvarietät und $\pi : G \to X$ die kanonische Projektion.

Unter $\mathbb{X}^*$ (bzw. $\mathbb{X}_*$) wollen wir die über F definierte Charaktergruppe (bzw. Cocharaktergruppe) verstehen. Sei $\chi \in \mathbb{X}^*(P)$ ein Charakter von P. Wir ordnen χ ein Geradenbündel L_χ auf X zu indem wir folgende Garbe definieren. Für $U \subseteq X$ offen setzen wir

$$\Gamma(U, L_\chi) := \{f \in \mathcal{O}_G(\pi^{-1}(U)) | f(pg) = \chi(p)f(g) \text{ für alle } p \in P, g \in G\},$$

d.h. wir erhalten ein Geradenbündel

$$L_\chi : G \times \mathbb{A}^1/_{\sim_P} \to P\backslash G \ , \ \overline{(g, v)} \mapsto Pg,$$

wobei $(g, v) \sim_P (h, w) :\Leftrightarrow \exists p \in P : (h, w) = (pg, \chi(p)v)$.

Die Zuordnung
$$\mathbb{X}^*(P) \to \mathrm{Pic}(X)\ ,\ \chi \mapsto L_\chi$$
definiert eine Einbettung von endlichem Index, d.h. $\mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X)) = \mathrm{rk}(\mathbb{X}^*(P))$.

Sei $\mathbb{A}_F = \widehat{\prod}_{v<\infty}^{R_v} F_v \times \prod_{v|\infty} F_v$ der Adelering von F bezüglich M_F und $G(\mathbb{A}_F) = \widehat{\prod}_{v<\infty}^{R_v} G(F_v) \times \prod_{v|\infty} G(F_v)$. Wir wählen eine maximale kompakte Untergruppe $K = \prod_{v \in M_F} K_v \subset G(\mathbb{A}_F)$, so dass $G(F_v) = P(F_v)K_v$ für alle $v \in M_F$ (Iwasawa-Zerleung). Dann tragen die Bündel $L_\chi(F_v)$ über $X(F_v)$ eine v-adische Metrik, die folgendermaßen definiert ist.

Sei $x \in X(F_v)$ und s ein Schnitt von L_χ auf einer Umgebung U von x. Wir können s auf eindeutige Weise ein Element $f \in \Gamma(U, L_\chi)$ zuordnen und ein $k \in K_v$ mit $\pi(k) = x$ wählen. Dann setzen wir
$$\|s(x)\|_v := |f(k)|_v.$$

Da χ eine stetige Funktion ist, werden kompakte Mengen auf kompakte Mengen abgebildet, d.h $|\chi(k)|_v = 1$ für alle $k \in K_v$. (Angenommen $\chi(k) \neq 1$, so wäre entweder die Folge $(\chi(p^n))_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(\chi(p^{-n}))_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, also $\chi(K_v)$ nicht kompakt.) Betrachten wir nun $k, k' \in K_v$ mit $\pi(k) = x = \pi(k')$, so ist $p := kk'^{-1} \in K_v \cap P$, d.h. $|f(k)|_v = |f(pk')|_v = |\chi(p)|_v |f(k')|_v = |f(k')|_v$ und somit $\|\cdot\|_v$ wohldefiniert.

Sei nun $x \in X(F)$, U eine Umgebung von x und s ein F-rationaler Schnitt von L_χ auf U mit $s(x) \neq 0$. Dann ist
$$H_\chi(x) = H_{\mathbb{L}_\chi}(x) = \prod_{v \in M_F} \|s(x)\|_v^{-1}.$$

Wir sehen, dass durch die Wahl der kompakten Untergruppe $K \subseteq G(\mathbb{A}_F)$ die Metrisierung aller Geradenbündel L_χ eindeutig bestimmt ist.

4.2 Das anti-kanonische Bündel und die anti-kanonische Zetafunktion

Wir wollen nun skizzieren, für welchen Charakter χ von P L_χ das anti-kanonische Geradenbündel ω_X^{-1} beschreibt.

Sei M ein Levi-Faktor von P, d.h. P ist das semidirekte Produkt von M und dem unipotenten Radikal von P, und A ein maximaler Split-Torus im Zentrum $Z(M)$. Dann ist $\mathbb{X}^*(M) = \mathbb{X}^*(P)$ ein Gitter von endlichem Index in $\mathbb{X}^*(A)$.

Sei weiter $\mathfrak{e} = \mathscr{L}(R(P))$ die Lie-Algebra des Radikals von P. Wir setzen
$$\rho = \rho_P := \frac{1}{2} \sum_{\chi \in \phi} \dim(V_\chi)\chi,$$

wobei $\chi \in \phi := \phi(R(P), A)$ die Menge der Wurzeln von A in $\mathfrak{e}$ und V_χ den Eigenraum zu χ bezeichne, und erhalten $L_{-2\rho}$ als das anti-kanonische Geradenbündel von X.

Die zugehörige Höhenzetafunktion

$$Z_{-2\rho}(s) = \sum_{x \in X(F)} H_{-2\rho}(x)^{-s}$$

wird *anti-kanonische Zetafunktion* genannt.

4.3 Ein Beispiel: $\mathbb{P}^1$

(a) Sei $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{A}^1)$ und $P = \mathrm{T}(2, \mathbb{A}^1) := \{\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{A}^1, \lambda \neq 0\}$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatizen. Wir betrachten $X = P \backslash G$. Dann haben wir die Projektion

$$\pi : G \to \mathbb{P}^1, \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (c : d).$$

Offensichtlich wirkt G transitiv auf $\mathbb{P}^1$ via Multiplikation von rechts und π ist gerade die Bahnabbildung von $(0 : 1)$. Es ist $\mathrm{St}_G((0 : 1)) = \mathrm{T}(2, \mathbb{A}^1) = P$ und somit folgt mit der Bahnformel $X = P \backslash G \cong \mathbb{P}^1$.

(b) Wir wollen nun die Charaktere von P bestimmen.

Jede Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in P$ lässt sich zerlegen als

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1}\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da jeder Morphismus unipotente Elemente auf unipotente Elemente abbildet, wirkt jeder Charakter von P auf dem hinteren Faktor trivial. Somit sind die Charaktere von P genau die Charaktere der Diagonalmatrizen $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$, d.h. von der Form

$$\chi_k : P \to \mathbb{A}^1, \ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \lambda^{-k}$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\chi_k \in \mathbb{X}(P)$, $L_k := L_{\chi_k}$ und $f \in \Gamma(X, L_k)$. Wir betrachten

$$U := \{\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \mu \in \mathbb{A}^1\}.$$

Es ist $f(g) = f(h)$ für alle $g, h \in G$ mit $Ug = Uh$. Mit der universellen Eigenschaft von $U\backslash G$ gibt es somit ein $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(U\backslash G)$, so dass $f = \widetilde{f} \circ \pi_U$, wobei $\pi_U : G \to U\backslash G$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (c, d)$ die Projektion auf die Nebenklassen sei.

Analog zu obigen Überlegungen sieht man, dass $U\backslash G \cong \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$, d.h. $\mathcal{O}(U\backslash G) = \mathbb{A}^1[t_0, t_1]$. Wir dürfen daher f als Polynom $\widetilde{f}$ in den Variablen t_2, t_3 auffassen. Es ist

$$f(\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \chi_k(\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix})f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \lambda^{-k} f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \lambda^{-k}\widetilde{f}(c, d)$$
$$= f(\begin{pmatrix} \lambda a + \mu c & \lambda b + \mu d \\ \lambda^{-1} c & \lambda^{-1} d \end{pmatrix}) = \widetilde{f}(\lambda^{-1}c, \lambda^{-1}d),$$

d.h. $\widetilde{f}$ ist homogen vom Grad k. Wir erhalten

$$\Gamma(X, L_k) = \{f \in \mathcal{O}_G(G) | f \in \mathbb{A}^1[t_2, t_3] \text{ und } f \text{ homogen vom Grad } k\}.$$

(d) Wir wollen nun das anti-kanonische Geradenbündel $L_{-2\rho}$ genauer bestimmen.

Sei $D := \{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} | 0 \neq \lambda \in \mathbb{A}^1\}$. Dann ist $P = D \ltimes U$ eine Levi-Zerlegung von P, d.h. es gilt $M = A = D$ und $\mathbb{X}^*(A) = \mathbb{X}^*(D) \cong \mathbb{Z}$.

Weiter ist $R(P) = P$ und $\mathfrak{e} = \{A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{A}^1) | A \text{ obere Dreiecksmatrix, } \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. D hat in $\mathfrak{e}$ nur eine Wurzel, nämlich $\chi_{-2} : \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \lambda\lambda = \lambda^2$, d.h. $-2\rho = \chi_2$ und somit $\omega_{\mathbb{P}^1}^{-1} = L_{\chi_2} = L_2$.

(e) Sei $M_{\mathbb{Q}}$ wie bisher und $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \widehat{\prod}_{p\in\mathbb{P}}^{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ der Adelering von $\mathbb{Q}$ bezüglich $M_{\mathbb{Q}}$, wobei $\mathbb{Q}_p$ der Körper der p-adischen Zahlen und $\mathbb{Z}_p$ der Ring der ganzen p-adischen Zahlen für eine Primzahl p sei.

Wir betrachten $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \widehat{\prod}_{p\in\mathbb{P}}^{Z_p} \mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$.

Durch das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren der Spalten von $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ erhalten wir eine Zerlegung

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{T}(2, \mathbb{R})\,\mathrm{SO}(2, \mathbb{R}).$$

Sei nun p eine Primzahl, $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$ und (c, d) die untere Zeile von A. Für die Komponente c, d gibt es $c', d' \in \mathbb{Z}_p$ und $k_c, k_d \in \mathbb{N}$, so dass $c = p^{-k_c}c'$ und $d = p^{-k_d}d'$. Wir setzen $\lambda := p^{\max(k_c, k_d)}$, d.h. es ist $(c, d) = \lambda^{-1}(\widetilde{c}, \widetilde{d})$ mit $\widetilde{c}, \widetilde{d} \in \mathbb{Z}_p$ und

$\mathrm{ggT}(\widetilde{c}, \widetilde{d}) = 1$. Wählen wir anschließend $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in \mathbb{Z}_p$, so dass $1 = \widetilde{c}\widetilde{u} + \widetilde{d}\widetilde{v}$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{v} & -\widetilde{u} \\ \widetilde{c} & \widetilde{d} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $\mu = \frac{b-\lambda\widetilde{v}}{\widetilde{c}}$. Es folgt

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}_p) = \mathrm{T}(2, \mathbb{Q}_p)\, \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$$

und wir wählen $K = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \times \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$.

(f) Nun können wir L_2 metrisieren. Sei $x = (x_0 : x_1) \in X = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ beliebig mit homogenen Koordinaten $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(x_0, x_1) = 1$. Es ist entweder $x_0 \neq 0$ oder $x_1 \neq 0$, sei o.B.d.A. $x_0 \neq 0$. Wir wählen

$$k_v := \begin{cases} \begin{pmatrix} y_1 & -y_0 \\ x_0 & x_1 \end{pmatrix} & \text{falls } v < \infty \text{ mit } y_0, y_1, \text{ so dass } x_0 y_0 + x_1 y_1 = 1 \text{ aus (1)} \\ \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_0^2+x_1^2}} & \frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2+x_1^2}} \\ \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+x_1^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_0^2+x_1^2}} \end{pmatrix} & \text{sonst} \end{cases}$$

und setzen

$$\|s(x)\|_v := \begin{cases} |x_0^2|_v & \text{falls } v < \infty \\ |\frac{x_0^2}{x_0^2+x_1^2}| & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. s ist der Schnitt von L_2 zu $f = t_2^2 \in \Gamma(X, L_2)$. Auf diese Weise erhalten wir die anti-kanonische Höhe

$$H_2(x) = H_{\mathbb{L}_2}(x) = \prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \|s(x)\|_v^{-1} = (x_0^2 + x_1^2) \prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \frac{1}{|x_0^2|_v} = x_0^2 + x_1^2.$$

Die anti-kanonische Zetafunktion

$$Z_2(s) = \sum_{x \in \mathbb{P}^(\mathbb{Q})} H_2(x)^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(x_0,x_1) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(x_0,x_1)=1}} \frac{1}{(x_0^2 + x_1^2)^s}$$

ist bekanntlich eine Eisensteinreihe. Allgemein können wir jede anti-kanonische Zetafunktion auf Fahnenvarietäten als Eisensteinreihe erhalten.

4.4 Eisensteinreihen

Seien $\mathfrak{a} = \mathbb{X}_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $\check{\mathfrak{a}} = \mathbb{X}^*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ und $K = \prod_{v \in M_F} K_v \subset G(\mathbb{A}_F)$ wie bisher. Für jedes $v \in M_F$ definieren wir wie folgt eine Funktion $H_{P,K_v}(g_v) \in \mathfrak{a}$ von $g_v \in G(F_v)$.

Sei $g_v = p_v k_v$ eine Iwasawa-Zerlegung von g_v mit $p_v \in P(F_v), k_v \in K_v$. Für ein $\chi \in \mathbb{X}^*(P)$ setzen wir

$$\exp(< H_{P,K_v}(g_v), \chi >) := |\chi(p_v)|_v,$$

wobei $< H_{P,K_v}(g_v), \chi >= H_{P,K_v}(g_v)(\chi)$. Wegen der Kompaktheit von K_v ist dies unabhängig von der Wahl von p_v. Durch lineare Fortsetzung erhalten wir $H_{P,K_v}(g_v) \in \mathfrak{a}$.

Die zugehörige globale Funktion $H_P = H_{P,K} : G(\mathbb{A}_F) \to \mathfrak{a}$ ist definiert als

$$H_P(g) := \sum_{v \in M_F} H_{P,K_v}(g_v)$$

für $g = (g_v) \in G(\mathbb{A}_F)$. Man beachte, dass es sich hierbei um eine endliche Summe handelt.

Für $\lambda \in \check{\mathfrak{a}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $g \in G(\mathbb{A}_F)$ definieren wir eine *Eisensteinreihe* als

$$E(\lambda, g) := \sum_{\delta \in X(F)} \exp(< H_P(\delta g), \lambda + \rho >),$$

mit $\rho = \rho_P$ wie in §4.2 und $H_P(\delta g) := H_P(xg)$ für alle $x \in \delta$, da H_P konstant bezüglich Multiplikation mit $p \in P(F)$. Nach einem Ergebnis von Langlands konvergiert diese absolut für $\operatorname{Re} \lambda \in \check{\mathfrak{a}}^+ + \rho$, wobei $\check{\mathfrak{a}}^+$ das Innere des Kegels, der durch die, durch P bestimmten, positiven Wurzeln erzeugt wird, bezeichne. Es gilt

Proposition: *Die anti-kanonische Zetafunktion $Z_{-2\rho}$ ist gleich $E((2s-1)\rho, e)$, wobei $e \in G(\mathbb{A}_F)$ das Einselement sei.*

Beweis: Sei $g \in G(F) \subset G(A_F)$ und $\chi \in \mathbb{X}^*(P)$ beliebig. Wir zeigen zunächst:

$$H_\chi(\pi(g)) = \exp(< H_P(g), \chi >).$$

Sei $g = pk$, $p \in P(\mathbb{A}_F)$, $k \in K$ eine Iwasawa-Zerlegung von g und $f \in \Gamma(U, L_\chi)$ eine Funktion mit $f(g) \neq 0$, die einen F-rationalen Schnitt s auf einer Umgebung U definiert. Für jedes $v \in M_F$ gilt

$$\|s(\pi(g))\|_v = |f(k_v)|_v = |\chi(p_v)|_v^{-1} |f(g)|_v,$$

d.h. mit der Produktformel folgt

$$H_\chi(\pi(g)) = \prod_{v \in M_F} \|s(\pi(g))\|_v^{-1} = \prod_{v \in M_F} \exp(< H_{P,K_v}(g), \chi >) |f(g)|_v^{-1} = \exp(< H_P(g), \chi >).$$

Somit

$$\begin{aligned} E((2s-1)\rho, e) &= \sum_{\delta \in X(F)} \exp(< H_P(\delta), (2s-1)\rho + \rho >) \\ &= \sum_{\delta \in X(F)} \exp(< H_P(\delta), 2s\rho >) \\ &= \sum_{\delta \in X(F)} (\exp(< H_P(\delta), -2\rho >))^{-s} \\ &= \sum_{\delta \in X(F)} H_{-2\rho}(\delta)^{-s} \\ &= Z_{-2\rho}(s). \end{aligned}$$

□

5 Die Manin-Vermutung für Fahnenvarietäten

Satz: *Die anti-kanonische Zetafunktion $Z_{-2\rho}(s)$ hat die folgenden Eigenschaften*

(a) $Z_{-2\rho}(s)$ hat eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$.

(b) $Z_{-2\rho}(s)$ ist holomorph für $\mathrm{Re}(s) > 1$, hat bei $s = 1$ einen Pol der Ordnung $t = \mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X))$ und hat keinen weiteren Pol bei $\mathrm{Re}(s) = 1$.

(c) $Z_{-2\rho}(s)$ hat keine Singularitäten auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Beweisidee: Da wir $Z_{-2\rho}$ als spezielle Eisensteinreihe identifiziert haben, lassen sich die Behauptungen mit Hilfe der Theorie der Eisensteinreihen beweisen. Da der Beweis aber sehr technisch ist, wollen wir hier nicht weiter darauf eingehen.

Mit dem Satz von Delange folgt sofort:

Korollar (Die Manin-Vermutung für Fahnenvarietäten)**:** *Ist $t = \mathrm{rk}(\mathrm{Pic}(X))$, so gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass*

$$N_X(\mathbb{L}_{-2\rho}, B) \sim C \cdot B(\log B)^{t-1}.$$

Beispiel: In §4.3 haben wir die anti-kanonische Höhe H_2 für $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ bestimmt. Wir sehen, dass

$$H_2(x) = x_0^2 + x_1^2 = \widetilde{H}(x)^2$$

mit $\widetilde{H}$ aus Beispiel (b) in §2 ist. Für die anti-kanonische Zetafunktion folgt somit für $\operatorname{Re} s > 1$

$$Z_2(s) = \sum_{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} H_2(x)^{-s} = \sum_{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} \widetilde{H}(x)^{-2s} = 2\frac{\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s)}{\zeta(2s)},$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion und $\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion zu $\mathbb{Q}(i)$ ist. Offensichtlich erfüllt $Z_2(s)$ die obigen Behauptungen und bekanntlich ist das Residuum des Pols bei $s = 1$ gleich $\frac{\pi}{2\zeta(2)}$. Mit dem Satz von Delange folgt

$$N_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{L}_2, B) \sim \frac{\pi}{2\zeta(2)} B.$$

6 Die verfeinerte Manin-Vermutung nach Peyre

Sei nun X eine über F definierte Fanovarietät, d.h. ω_X^{-1} ist ample. Wir haben in §2 gesehen, dass die Konstante C, im asymptotischen Verhalten von $N_X(\mathbb{L}, B)$, von der Wahl der Metriken auf dem Geradenbündel $\mathbb{L}$ abhängt. Im Folgenden wollen wir diesen Zusammenhang genauer untersuchen.

Seien $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_F}$ Metriken auf dem kanonischen Geradenbündel. Wir wollen diese Metriken nun verwenden um ein Maß auf den lokalen Räumen $X(F_v)$ des Adeleraums zu definieren und anschließend, mit einer geeigneten Normierung, ein Produkt dieser Maße auf $X(\mathbb{A}_F)$ einführen.

Im Allgemeinen kann ein Maß auf einer n-dimensionalen analytischen Mannigfaltigkeit, in lokalen Koordinaten, durch einen Ausdruck der Form $d\mu(x) = f(x)dx_1 \dots dx_n$, wobei f eine positive Funktion ist, dargestellt werden. Betrachtet man nun ein anderes System lokaler Koordinaten, so schlägt sich der Kartenwechsel durch den Betrag der Jakobideterminanten nieder. Wir können also $d\mu(x)$ als den Betrag der Differentialform $f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ interpretieren.

Wir setzen für eine lokale Differentialform $\alpha = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ vom Grad n

$$\frac{|\alpha|_v}{\|\alpha\|_v} := \frac{|f(x)|_v}{\|\alpha\|_v} \widetilde{dx}_1 \dots \widetilde{dx}_n,$$

wobei die Maße $\widetilde{dx}_i$ derart normiert seien, dass $\int_{\|x\|_v \leq 1} \widetilde{dx}_i = 1$ gilt.

Analog zu obigen Beobachtungen sehen wir, dass dies ein wohldefiniertes Maß ergibt und unabhängig von der Wahl von α ist. Folglich können wir diese lokalen Maße zu einem Maß $\tau_{X,v}$ auf $X(F_v)$ verkleben.

Da X projektiv, also insbesondere vollständig, ist, ist der Adeleraum $X(\mathbb{A}_F)$ gleich dem Produkt aller $X(F_v)$ mit $v \in M_F$, versehen mit der Produkttopologie. Wir wollen nun auf $X(\mathbb{A}_F)$ ein Maß definieren, welches gleich dem Produkt der lokalen Maße $\tau_{X,v}$ ist. Dies ergibt ein Maß auf $X(\mathbb{A}_F)$ genau dann wenn das Produkt

$$\prod_{v<\infty} \tau_{X,v}(X(F_v))$$

absolut konvergiert. Da dieses Produkt aber divergiert, müssen wir geeignete Konvergenz-Faktoren bestimmen.

Nach einer Formel von Weil gilt für fast alle endlichen Stellen v

$$\tau_{X,v}(X(F_v)) = q_v^{-\dim X} \# X(k_v),$$

wobei k_v der Restklassenkörper von F an der Stelle v und q_v seine Kardinalität ist. $X(k_v)$ bezeichne die Menge der Lösungen in k_v eines festen Systems an Gleichungen, das X definiert, mit Koeffizienten im Ring der ganzen Zahlen R_F von F.

Sei S die Menge der archimedischen und der endlich vielen nicht-archimedischen Bewertungen, für die die obere Gleichung nicht erfüllt ist.

Mit Weils Vermutung, die von Deligne bewiesen wurde, und einigen kohomologischen Berechnungen folgt für $v \notin S$

$$\tau_{X,v}(X(F_v)) = 1 + \frac{1}{q_v} \operatorname{Tr}(\operatorname{Frob}_v \mid \operatorname{Pic}(X_{\overline{F}})_{\mathbb{R}}) + O(q_v^{-3/2}),$$

wobei $X_{\overline{F}}$ bedeutet, dass wir die Varietät über dem algebraischen Abschluss $\overline{F}$ von F betrachten und $\operatorname{Frob}_v \in \operatorname{Gal}(\overline{F}|F)$ ein geometrisches Frobeniuselement der Galoisgruppe von $\overline{F}|F$ an der Stelle v ist.

Wir wollen nun die Artin L-Reihe des Galois-Moduls $P := \operatorname{Pic}(X_{\overline{F}})_{\mathbb{R}}$ betrachten. Sie ist definiert als

$$L_S(s,P) = \prod_{v \notin S} L_v(s,P),$$

mit $L_v(s,P) = \det(1 - q_v^{-s} \operatorname{Frob}_v | P)^{-1}$. Dieses Produkt konvergiert absolut für $\operatorname{Re}(s) > 1$ und definiert dort eine holomorphe Funktion. Darüber hinaus hat $L_S(s,P)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ mit einem Pol der Ordnung $t = \operatorname{rk}(\operatorname{Pic}(X_F))$ bei $s = 1$ und positivem Residuum

$$L_S^*(1,P) := \lim_{s \to 1} \frac{L_S(s,P)}{(s-1)^t}.$$

Damit erhalten wir unsere gesuchten Konvergenz-Faktoren und erhalten ein Maß auf $X(\mathbb{A}_F)$, nämlich

Definition: Das *Tamagawa-Maß* τ_X auf $X(\mathbb{A}_F)$ zu $(\| \cdot \|_v)_{v \in M_F}$ ist definiert als

$$\tau_X = L_S^*(1,P) \prod_{v \notin S} (L_v(1,P)^{-1} \tau_{X,v}) \prod_{v \in S} \tau_{X,v}.$$

Bemerkung: Man beachte, dass die obige Definition unabhängig von der konkreten Wahl von S ist, d.h. das Maß ändert sich nicht, wenn wir S kleiner oder größer wählen.

Vermutung (Die verfeinerte Manin-Vermutung nach Peyre)**:** *Sei X rational über F, d.h. X ist birational äquivalent über F zu $\mathbb{A}^n$, und C die Konstante aus der Manin-Vermutung, also $N_X(\omega_X^{-1}, B) \sim C \cdot B(\log B)^{t-1}$. Dann ist C bis auf eine rationale Zahl gleich $\tau_X(X(\mathbb{A}_F))$.*

Satz (Peyre)**:** *Die verfeinerte Manin-Vermutung gilt für Fahnenvarietäten $X = P\backslash G$.*

Beispiel: Wir wollen nun das Volumen von $\mathbb{P}^n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ bezüglich des Tamagawa-Maßes zu den Metriken aus §4 berechnen.

Für jede Primzahl p ist $k_p = \mathbb{F}_p$, d.h.

$$\tau_{\mathbb{P}^n,p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}_p)) = p^{-n}(\frac{p^{n+1}-1}{p-1}).$$

Da $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$, ist $\mathrm{Frob}_p | P = \mathrm{id}$. Es folgt

$$L(s,P) = \prod_{p \text{ prim}} L_p(s,P) = \prod_{p \text{ prim}} \det(1 - p^{-s}\,\mathrm{Frob}_p | P)^{-1} = \prod_{p \text{ prim}} (1-p^{-s})^{-1} = \zeta(s)$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet. Bekanntlich hat $\zeta(s)$ bei $s = 1$ einen einfachen Pol mit Residuum 1, d.h. $L^*(1,P) = 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\tau_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})) &= \tau_{\mathbb{P}^n,\infty}(\mathbb{R}) \prod_{p \text{ prim}} (L_p(1,P)^{-1}\tau_{\mathbb{P}^n,p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}_p))) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{d}x_1 \ldots \widetilde{d}x_n}{(1+x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{n+1}{2}}} \prod_{p \text{ prim}} ((1-p^{-1})\frac{p^{n+1}-1}{p^n(p-1)}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{d}x_1 \ldots \widetilde{d}x_n}{(1+x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{n+1}{2}}} \prod_{p \text{ prim}} \frac{p^{n+1}-1}{p^{n+1}} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{d}x_1 \ldots \widetilde{d}x_n}{(1+x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{n+1}{2}}} \prod_{p \text{ prim}} (1-\frac{1}{p^{n+1}}) \\
&= \frac{1}{\zeta(n+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{d}x_1 \ldots \widetilde{d}x_n}{(1+x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Für $n = 1$ ergibt sich

$$\tau_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{A}_\mathbb{Q})) = \frac{1}{\zeta(2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2\zeta(2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\zeta(2)}.$$

Dies entspricht genau der Konstante aus der Asymptotik von $N_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{L}_2, B)$, die wir im Beispiel in §5 für $\mathbb{P}^1$ erhalten haben.