Korrekturen zu
**Analysis, 2te Auflage**
Anton Deitmar, Springer-Verlag 2017

Ich bedanke mich bei Sebastian Hirsch, Markus Leder, Martin Meßmer, Luca Rendsburg und Paul Weiß.

- (Sebastian Hirsch) Der Beweis von Satz 3.1.16 (a) enthält einen Ringschluss. Hier ist eine korrekte Version:

  (a) Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon/2$ und $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Für jedes $n \geq n_0$ gilt dann

  $$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

  Damit folgt die Behauptung. □

- (Martin Meßmer) Der Satz 8.6.4 (Arzela-Ascoli) ist inkorrekt formuliert. Korrekt ist, dass die Teilfolge kompakt-gleichmäßig konvergiert. Hierzu die Definition:

  **Definition.** Eine Folge $(f_n)$ von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ heißt *kompakt-gleichmäßig konvergent* gegen eine Funktion $f$, falls für jedes kompakte Teilmenge $K \subset X$ die Folge $f_n|_K$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert.

  **Satz 8.6.4.** (Arzela-Ascoli).*Sei $X$ ein metrischer Raum, der eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Sei $(f_n)$ eine Folge stetiger Funktionen auf $X$. Falls*

  – *die Folge in jedem Punkt gleichgradig stetig ist und*
  – *für jedes $x \in X$ die Folge der Werte $f_n(x) \in \mathbb{C}$ beschränkt ist,*

  *dann besitzt $(f_n)$ eine kompakt-gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

  *Beweis.* Sei $(x_j)$ eine Aufzählung einer dichten Teilmenge von $X$. Da die Wertefolge $f_n(x_1)$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge $(f_n^1)$ so dass die Folge $\big(f_n^1(x_1)\big)$ konvergiert. Als nächstes sei $(f_n^2)$ eine Teilfolge von $(f_n^1)$, so dass auch $f_n^2(x_2)$ konvergiert. Wiederholt man diesen Prozess, so erhält man zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge $(f_n^{j+1})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\left(f_n^{j+1}(x_{j+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Diagonalfolge

  $$g_n \;=\; f_n^n$$

  ist, wie gezeigt werden wird, gleichmäßig konvergent. Zunächst konvergiert $(g_n(x_j))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Der Grenzwert sei mit $g(x_j)$ bezeichnet.

Zuerst wird gezeigt, dass $g_j(x)$ für jedes $x \in X$ konvergiert. Hierzu sei $x \in X$ und sei ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Für $\delta > 0$ sei $B_\delta(x)$ der offene $\delta$-Ball um $x$, also

$$B_\delta(x) = \{y \in X : d(x, y) < \delta\}.$$

Wegen der gleichgradigen Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in B_\delta(x)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon/3$. Da die Folge $(x_j)$ dicht ist in $X$, gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ so dass $x_j \in B_\delta(x)$. Die Folge $g_n(x_j)$ konvergiert, also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt $|g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \varepsilon/3$. Für $m, n \geq n_0$ gilt daher

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &\leq |g_m(x) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $(g_n(x))$ eine Cauchy-Folge, konvergiert also gegen ein $g(x) \in \mathbb{C}$.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass die Funktion $g(x) = \lim_n g_n(x)$ stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ gegeben. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$ so dass für $y \in B_\delta(x)$ gilt $|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon/3$. Für solches $y$ existiert dann ein $n_0$, so dass fuer $n \geq n_0$ gilt $|g(x) - g_n(x)|, |g_n(y) - g(y)| < \varepsilon/3$ und damit

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(y)| + |g_n(y) - g(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher ist $g$ stetig.

Im finalen Schritt wird nun kompakt-gleichmäßige Konvergenz gezeigt. Da $g$ stetig ist, ist auch die Folge $(g, g_1, g_2, g_3, \dots)$ gleichgradig stetig. Sei $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge und sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $z \in K$ gibt es ein $\delta_z > 0$, so dass für alle $y \in K$ gilt

$$d(z, y) < \delta_z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |g_n(z) - g_n(y)| < \varepsilon/3 & \text{für alle } \ n \in \mathbb{N} \\ |g(z) - g(y)| < \varepsilon/3. \end{cases}$$

Da $g_n(z)$ gegen $g(z)$ konvergiert, existiert ein $N_z \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq N_z$ gilt $|g_n(z) = g(z)| < \varepsilon/3$. Also gilt für jedes $y \in K$ mit $|z - y| < \delta_z$ und jedes $n \geq N_z$, dass

$$\begin{aligned} |g_n(y) - g(y)| &\leq |g_n(y) - g_n(z)| + |g_n(z) - g(z)| + |g(z) - g(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Mengen $B_{\delta_z}(z)$, $z \in K$ bilden eine offene Überdeckung von $K$, also gibt es $z_1, \dots, z_m$, so dass $K \subset \bigcup_{j=1}^m B_{\delta_j}(z_j)$, wobei $\delta_j = \delta_{z_j}$ geschrieben wurde. Sei $N = \max(N_{z_1}, \dots, N_{z_m})$. Dann gilt

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |g_n(y) - g(y)| < \varepsilon$$

für alle $y \in K$ und damit ist die kompakt-gleichmäßige Konvergenz bewiesen. $\square$

- (Luca Rendsburg) Das Lemma 16.2.1 ist inkorrekt, in Teil (a) fehlt eine Voraussetzung. Die korrekte Formulierung ist diese:

  **Definition.** Sei $X$ eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ heisst *Komplement-abgeschlossen*, falls aus $A \in \mathcal{E}$ folgt, dass $A^c \in \mathcal{E}$ ist.

  **Lemma 16.2.1.** a) *Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Komplement-abgeschlossene Erzeuger der $\sigma$-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, so wird die Produkt-$\sigma$-Algebra von allen Mengen der Form $E \times F$ mit $E \in \mathcal{E}$ und $F \in \mathcal{F}$ erzeugt.*

  b) *Sind $X, Y$ topologische Räume, versehen mit den Borel-$\sigma$-Algebren und ist jede offene Menge $U \subset X \times Y$ eine abzählbare Vereinigung offener Rechtecke, dann ist die Produkt-$\sigma$-Algebra auf $X \times Y$ gleich der Borel-$\sigma$-Algebra bezüglich der Produkttopologie.*

  *Insbesondere folgt, dass die Produkt-$\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ gleich der Borel-$\sigma$-Algebra von $\mathbb{R}^n$ ist.*

  *Beweis.* (a) Aus $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ folgt sofort

  $$\mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

  Für die umgekehrte Inklusion wird zunächst

  $$\mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) = \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{B})$$

  gezeigt. Hierzu sei $B \in \mathcal{B}$ und $E \in \mathcal{E}$. Es ist zu zeigen: $E \times B \in \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$. Wir machen uns klar, dass die Menge

  $$\mathcal{S} := \big\{ Q \subset Y : E \times Q, E^c \times Q \in \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) \big\}$$

  eine $\sigma$-Algebra ist. Abzaehlbare Vereinigungen sind klar. Fuer die Komplement-Abgeschlossenheit sei $Q \in \mathcal{S}$, so ist

  $$E \times Q^c = (E^c \times Q)^c \cap E \times X$$

  und damit ist $Q^c \in \mathcal{S}$.

Nun ist klar, dass $\mathcal{S}$ die Menge $\mathcal{F}$ umfasst, also umfasst sie $\mathcal{B}$ und $B$ liegt in ihr, was zu beweisen war. Aus Symmetriegründen folgt nun auch $\mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

(b) Nach Teil (a) ist die Produkt-$\sigma$-Algebra von den Rechtecken der Form $A \times B$ erzeugt, wobei $A$ und $B$ offen oder abgeschlossen sind. Sind beide offen oder beide abgeschlossen, so ist auch $A \times B$ offen oder abgeschlossen, liegt also in der Borel-$\sigma$-Algebra von $X \times Y$. Ist hingegen etwa $A$ abgeschlossen und $B$ offen, dann ist

$$A \times B = X \times B \smallsetminus A^c \times B$$

eine Differenz offener Mengen, liegt also auch in der Borel-$\sigma$-Algebra des Produktes $X \times Y$. Da schliesslich eine gegebene offene Menge in $X \times Y$ eine abzählbare Vereinigung offener Rechtecke ist, liegt sie schon in der Produkt-$\sigma$-Algebra, die damit gleich der Borel-$\sigma$-Algebra ist. $\square$

**Einzelne Druckfehler**

3.3.4 Seite 59 im Beweis muss es heissen: $\gamma_1 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$.

3.6.4 Seite 62: Es fehlt "$k$" in der Bezeichnung der Teilfolge.

4.5.1 Seite 87 Mitte: ersetze "Diustributivgesetz" durch "Distributivgesetz".

6.5.15 Seite 139 oben: Statt $m \log n - n + 1$ muss es heißen: $n \log n - n + 1$, also wird das $m$ durch ein $n$ ersetzt.