Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
13.04.2005
Blatt 1

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Seien X und Y zwei zueinander homöomorphe topologische Räume. Zeigen Sie: Ist X wegzusammenhängend, so auch Y.

2. Zeigen Sie, dass $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{S}^1$ und $Z = \mathbf{S}^2$ paarweise nicht homöomorph sind.

3. Sei (X, p) ein punktierter topologischer Raum und $\mathcal{S}(X, p)$ sein *Schleifenraum* (aller in p startenden und endenden Wege). Zeigen Sie, dass die Homotopierelation $\simeq$ auf $\mathcal{S}(X, p)$ eine Äquivalenzrelation ist.

4. Sei (X, p) ein punktierter Raum, $\mathcal{S}(X, p)$ sein Schleifenraum und $*$ auf $\mathcal{S}(X, p)$ die Hintereinanderschaltung von Wegen. Zeigen Sie:
   (a) Ist $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ und $\beta_1 \simeq \beta_2$ in $\mathcal{S}(X, p)$, so ist auch $\alpha_1 * \beta_1 \simeq \alpha_2 * \beta_2$.
   (b*) Definiert man auf $\pi_1(X, p) = \mathcal{S}(X, p)/\simeq$ das Produkt durch $[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta]$, so zeigen Sie, dass dies wohldefiniert ist und $\pi_1(X, p)$ zu einer Gruppe macht.

Abgabe: Mittwoch, 20. April 2005, 9.15 Uhr