Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
20.04.2005
Blatt 02

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei X ein topologischer Raum und $p_1, p_2 \in X$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg von p_1 nach p_2, $\gamma(0) = p_1$ und $\gamma(1) = p_2$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi_1(X, p_1) \to \pi_1(X, p_2)$,
$$[\alpha] \mapsto [\gamma^- * \alpha * \gamma]$$
wohldefiniert ist und ein Gruppenisomorphismus ist.

2. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Man nennt ein Objekt X in $\mathcal{C}$ *ein initiales universelles Objekt in* $\mathcal{C}$, wenn die Menge $\mathrm{Mor}(X, Y)$ für alle Objekte Y in $\mathcal{C}$ einelementig ist. Man nennt ein Objekt Y in $\mathcal{C}$ *ein finales universelles Objekt in* $\mathcal{C}$, wenn $\mathrm{Mor}(X, Y)$ einelementig für alle Objekte X in $\mathcal{C}$ ist.
   (a) Untersuchen Sie die Kategorien **Ens**, **Grp** und **Top** auf die Existenz universeller Objekte.
   (b) Zeigen Sie: Ein universelles Objekt in $\mathcal{C}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

3. Seien X_1 und X_2 zwei Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein Tripel (X, i_1, i_2) bestehend aus einem Objekt X in $\mathcal{C}$ und Morphismen $i_1 \in \mathrm{Mor}(X_1, X)$ und $i_2 \in \mathrm{Mor}(X_2, X)$ heißt *eine Summe von* X_1 *und* X_2 *in* $\mathcal{C}$, wenn gilt: Ist (Y, j_1, j_2) ein weiteres solches Tripel, so existiert genau ein $\Phi \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ mit $\Phi i_1 = j_1$ und $\Phi i_2 = j_2$.
   Zeigen Sie: Eine Summe (X, i_1, i_2) von zwei Objekten X_1 und X_2 ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, d. h.: ist (Y, j_1, j_2) eine weitere Summe, so existiert ein Isomorphismus $\Phi \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ mit $\Phi i_1 = j_1$ und $\Phi i_2 = j_2$.

4. (a) Bestimmen Sie die Summe von zwei Objekten in **Ens**, **Top** und **Ab**.
   (b*) Bestimmen Sie Sie die Summe von zwei Objekten in **Grp** und $\mathbf{Top}_0$.

Abgabe: Mittwoch, 27. April 2005, 12.15 Uhr