Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
27.04.2005
Blatt 03

Übungen zu
„Algebraische Topologie“

1. Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann zusammenziehbar ist, wenn es einen Punkt $p \in X$ gibt, so dass die auf p konstante Abbildung c_p homotop zur Identität ist, $c_p \sim \mathrm{id}$.

2. Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* F *von* $\mathcal{C}_1$ *nach* $\mathcal{C}_2$ ordnet jedem Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ein Objekt $F(X_1)$ in $\mathcal{C}_2$ zu und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ in $\mathcal{C}_1$ einen Morphismus $f^* = F(f) \in \mathrm{Mor}(F(Y_1), F(X_1))$ in $\mathcal{C}_2$ so zu, dass für alle Objekte X_1 in $\mathcal{C}_1$ gilt: $F(\mathrm{id}_{X_1}) = \mathrm{id}_{F(X_1)}$; und für alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ und $g \in \mathrm{Mor}(Y_1, Z_1)$ in $\mathcal{C}_1$ gilt: $F(gf) = F(f)F(g)$ (kurz: $(gf)^* = f^*g^*$).

   Sei nun K ein Körper und V ein fester K-Vektorraum. Man ordnet dann jedem K-Vektorraum W den K-Vektorraum der Homomorphismen $\mathrm{Hom}_K(W, V)$ zu und jeder K-linearen Abbildung $f\colon W_1 \to W_2$ den Homomorphismus $f^*\colon \mathrm{Hom}(W_2, V) \to \mathrm{Hom}(W_1, V)$, $f^*(h) = h \circ f$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hom}_K(\cdot, V)$ ein kontravarianter Funktor von $\mathbf{Vect}_K$ auf sich selbst ist.

3. Sei X ein topologischer Raum. Man definiert die *Einhängung* (auch *Suspension*) von X als den topologischen Raum SX, der als Quotient des Zylinders $ZX := X \times I$ nach der Äquivalenzrelation $\sim$ entsteht, die den *Deckel* $X \times \{1\}$ und den *Boden* $X \times \{0\}$ jeweils zu einem Punkt identifiziert, $SX := ZX/\sim$. Man definiere nun für eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung $f_*\colon SX \to SY$ derart, dass $S\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ zu einem (covarianten) Funktor wird.

4. Sei $S\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ der Einhängungsfunktor aus Aufgabe 3 und $n \in \mathbf{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon S(\mathbf{S}^n) \to \mathbf{S}^{n+1}$,

   $$\Phi([x,t]) = (2\sqrt{t - t^2}x, 2t - 1)$$

   wohldefiniert und ein Homöomorphismus ist. (Hinweis: Ist X ein kompakter Raum, Y hausdorffsch und $\Phi\colon X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist Φ bereits ein Homöomorphismus.)

Abgabe: Mittwoch, 3. Mai 2005, 12.15 Uhr