Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
11.05.2005
Blatt 04

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei (X, p) ein punktierter toplogischer Raum. Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung $\alpha\colon (\mathbf{S}^n, 1) \to (X, p)$ genau dann nullhomotop ist, wenn es ein stetiges $F\colon (\mathbf{B}^{n+1}, 1) \to (X, p)$ gibt mit $F|\mathbf{S}^n = \alpha$.

2. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologische Räume und $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetige Abbildungen, die homotop zueinander sind, $f \simeq g$. Zeigen Sie, dass dann die induzierten Homomorphismen $f_*, g_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ (für alle $n \in \mathbf{N}$) gleich sind, $f_* = g_*$.

3. Zeigen Sie für alle punktierten topologischen Räume (X, x_0) und (Y, y_0):
$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)\,.$$

4. Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Teilraum, $x_0 \in A$ und $i\colon (A, x_0) \to (X, x_0)$ die Inklusion. Es heißt (A, x_0) ein *Deformationsretrakt von* (X, x_0), wenn es eine stetige Abbildung $r\colon (X, x_0) \to (A, x_0)$ gibt mit $r \circ i = \mathrm{id}_{(A,x_0)}$ und $i \circ r \simeq \mathrm{id}_{(X,x_0)}$. Zeigen Sie:
   (a) $(\mathbf{S}^n, 1)$ ist ein Deformationsretrakt von $(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}, 1)$.
   (b) Ist $(A, x_0) \subseteq (X, x_0)$ ein Deformationsretrakt, so haben (A, x_0) und (X, x_0) (für alle $n \in \mathbf{N}$) die gleichen Homotopiegruppen, $\pi_n(A, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$.

Abgabe: Mittwoch, 18. Mai 2005, 12.15 Uhr