Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
18.05.2005
Blatt 05

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Die *reduzierte Einhängung* SX wird definiert als der Zylinder $ZX = X \times I$ über X, bei dem man die Teilmenge $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$ zu einem Punkt identifiziert und den man dann zum Basispunkt von SX bestimmt. Erklären Sie nun S auch auf den Morphismen von $\mathbf{Top}_0$ und zeigen Sie dann, dass S ein Funktor von $\mathbf{Top}_0$ nach $\mathbf{Top}_0$ ist.

2. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei $\mathbf{S}^n$ die n-dimensionale Sphäre betrachtet als punktierter topologischer Raum mit Basispunkt $p_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Sei $S\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Top}_0$ der reduzierte Einhängungsfunktor aus Aufgabe 1. Zeigen Sie:
$$S(\mathbf{S}^n) \cong \mathbf{S}^{n+1}$$
Hinweis: Sei $\iota\colon \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+2}$, $x \mapsto (x, 0)$. Wir betrachten $\mathbf{S}^n \subseteq \mathbf{B}^{n+1}$ als Teilmenge von $\mathbf{R}^{n+2}$ via ι. Ist dann $H_\pm \subseteq \mathbf{S}^{n+1}$ die obere bzw. untere Hemisphäre von $\mathbf{S}^{n+1}$, so seien $p_\pm\colon H_\pm \to \mathbf{B}^{n+1}$ die (homöomorphen) Projektionen auf die Äquatorebene. Zeigen Sie, dass durch $f\colon S(\mathbf{S}^n) \to \mathbf{S}^{n+1}$ ein Homöomorphismus (zwischen punktierten topologischen Räumen) gegeben ist:
$$f([x,t]) = \begin{cases} p_-^{-1}(2tx + (1-2t)p_0) & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ p_+^{-1}((2-2t)x + (2t-1)p_0) & \text{für} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

3. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, X und Y Objekte in $\mathcal{C}$ und $*, *'$ seien zwei Verknüpfungen auf $\mathrm{Mor}(X, Y)$, so dass gilt:
   (a) Es gibt ein Element f_0 in $\mathrm{Mor}(X, Y)$, welches ein zweiseitiges neutrales Element für beide Verknüpfungen ist;
   (b) die Verknüpfungen $*$ und $*'$ sind wechselseitig distributiv, d. h.: für alle $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ gilt:
   $$(f_1 * f_2) *' (g_1 * g_2) = (f_1 *' g_1) * (f_2 *' g_2)$$
   Zeigen Sie: Dann sind $*$ und $*'$ gleich, assoziativ und kommutativ.

4. (a) Seien (Z, z_0) und (X, x_0) punktierte topologische Räume, S der reduzierte Einhängungsfunktor aus Aufgabe 1 und $S^2 := S \circ S$. Für zwei Morphismen $f, g\colon S^2(Z, z_0) \to (X, x_0)$ setzen wir:
   $$f * g([[z,s],t]) = \begin{cases} f([[z,2s],t]) & \text{für} \quad 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g([[z,2s-1],t] & \text{für} \quad \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$
   und

$$f *' g([[z,s],t]) = \begin{cases} f([[z,s],2t]) & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g([[z,s],2t-1]) & \text{für} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen auf $\mathrm{Mor}(S^2(Z,z_0),(X,x_0))$ Verknüpfungen $*, *'$ auf den Morphismen der Homotopiekategorie $[S^2(Z,z_0),(X,x_0)]$ induzieren, die die Voraussetzungen von Aufgabe 3 erfüllen.

(b) Sei (X,x_0) ein punktierter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die Homotopiegruppen $\pi_n(X,x_0)$ für alle $n \geq 2$ abelsch sind.

Abgabe: Mittwoch, 25. Mai 2005, 12.15 Uhr