Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
25.05.2005
Blatt 06

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Vervollständigen Sie den Beweis des Fünferlemmas aus der Vorlesung.

2. Sei $k \in \mathbf{N}$. Zeigen Sie, dass der Homologiefunktor $H_k \colon \mathbf{KK} \to \mathbf{Ab}$ endliche Summen respektiert, d. h.: für zwei Kettenkomplexe C und C' sind (kanonisch) isomorph:
$$H_k(C \oplus C') \cong H_k(C) \oplus H_k(C')\,.$$

3. Seien F und G Funktoren zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$. Eine *natürliche Transformation* Φ zwischen F und G ordnet jedem Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ einen Morphismus $\Phi(X_1) \in \mathrm{Mor}(F(X_1), G(X_1))$ in $\mathcal{C}_2$ derart zu, dass für jedes $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ in $\mathcal{C}_1$ gilt:
$$\Phi(Y_1)F(f) = G(f)\Phi(X_1).$$
Nun zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbf{Z}$ ist der verbindende Homomorphismus $(\partial_*)_k$ eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren H''_k und H'_{k-1}, die von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen in die Kategorie der abelschen Gruppen gehen.

4. Sei $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Beweisen Sie die Exaktheit der zugehörigen langen Homologiesequenz an den Stellen $H_k(C)$ und $H_k(C'')$, für alle $k \in \mathbf{Z}$.

Abgabe: Mittwoch, 01. Juni 2005, 12.15 Uhr