Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
01.06.2005
Blatt 07

Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Ein Kettenkomplex C heißt *(ketten-) zusammenziehbar*, wenn die Identität id_C auf C (ketten-) homotop zur Nullabbildung 0_C ist, $\mathrm{id}_C \simeq 0_C$. Zeigen Sie, dass für einen zusammenziehbaren Komplex C sämtliche Homologiegruppen verschwinden (man sagt: C ist *azyklisch*), $H_k(C) = (0)$, für alle $k \in \mathbf{Z}$.

2. Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein nicht-negativer Kettenkomplex. Eine *Augmentierung* von C ist ein surjektiver Homomorphismus $\varepsilon\colon C_0 \to \mathbf{Z}$ mit $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. Der *reduzierte Kettenkomplex* eines *augmentierten Kettenkomplexes* (C, ε) ist der Teilkomplex $\tilde{C} \subset C$ mit $\tilde{C}_k := C_k$ für $k \geq 1$ und $\tilde{C}_0 := \ker(\varepsilon)$. Man setzt $\tilde{H}(C) := H(\tilde{C})$. Zeigen Sie:
$$H_0(C) \cong \tilde{H}_0(C) \oplus \mathbf{Z}$$
$$H_k(C) \cong \tilde{H}_k(C) \text{ für } k \geq 1$$

3. Sei ε eine Augmentierung eines nicht-negativen Kettenkomplexes C. Sei $\underline{\mathbf{Z}}$ der Kettenkomplex, der an der Stelle $k = 0$ aus $\mathbf{Z}$ besteht und sonst überall aus der Nullgruppe. Zeigen Sie:
   (a) Eine Augmentierung ε von C kann als eine surjektive Kettenabbildung von C nach $\underline{\mathbf{Z}}$ aufgefasst werden.
   (b) Ist $\varepsilon\colon C \to \underline{\mathbf{Z}}$ eine *Kettenäquivalenz* (d.h. es gibt eine Kettenabbildung $\tau\colon \underline{\mathbf{Z}} \to C$ mit $\varepsilon \circ \tau \simeq \mathrm{id}_{\underline{\mathbf{Z}}}$ und $\tau \circ \varepsilon \simeq \mathrm{id}_C$), so ist der reduzierte Kettenkomplex zusammenziehbar.

Abgabe: Mittwoch, 08. Juni 2005, 12.15 Uhr