Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
08.06.2005
Blatt 08

# Übungen zu „Algebraische Topologie“

1. Sei $X$ ein topologischer Raum, $S(X)$ sein singulärer Kettenkomplex und $\varepsilon\colon S(X) \to \underline{\mathbf{Z}}$ gegeben auf den singulären 0-Simplexen (= Punkten auf $X$) durch $\varepsilon(x) = 1$, $x \in X$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\varepsilon$ eine Augmentierung von $S(X)$ ist (vgl. Aufg. 3, Blatt 07), wenn $X$ nicht-leer ist.
   (b) Zeigen Sie, dass für die reduzierte Homologie $\tilde{H}$ von $X$ gilt (vgl. Aufg. 2, Blatt 07): $\tilde{H}_0(X) = 0$ genau dann, wenn $X$ wegzusammenhängend ist.

2. Sei $X$ ein topologischer Raum, $\Delta_1$ und $\Delta_2$ die Standard-Simplexe in den Dimensionen $k = 1$ und $k = 2$ und $\alpha\colon \Delta_1 \to X$ ein singulärer 1-Simplex. Sei weiter $\alpha^-\colon \Delta_1 \to X$ der rückwärts durchlaufene 1-Simplex, d.h.: $\alpha^-(\lambda_0, \lambda_1) = \alpha(\lambda_1, \lambda_0)$, für alle $\lambda \in \Delta_1$. Zeigen Sie, dass die Summe $c_1 = \alpha^- + \alpha$ in $S_1(X)$ ein singulärer Rand ist, also $\alpha^- + \alpha = \partial_2(c_2)$ für eine singuläre 2-Kette $c_2 \in S_2(X)$. (Hinweis: Betrachten Sie das singuläre 2-Simplex $\sigma\colon \Delta_2 \to X$ gegeben durch $\sigma(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \alpha(\lambda_0 + \lambda_2, \lambda_1)$.)

3. Sei $X \subseteq \mathbf{R}^n$ eine sternförmige Menge und $\varepsilon\colon S(X) \to \underline{\mathbf{Z}}$ die Augmentierung des singulären Kettenkomplexes aus Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $\varepsilon$ eine Kettenäquivalenz ist. (Hinweis: Für einen Sternpunkt $p \in X$ setze man $\tau\colon \underline{\mathbf{Z}} \to S(X)$, $\tau(n) = n\,p$, und zeige, dass die Kegelkonstruktion $C_p\colon S(X) \to S(X)$ aus der Vorlesung eine Kettenhomotopie zwischen id und $\tau \circ \varepsilon$ liefert.)

**Abgabe: Mittwoch, 15. Juni 2005, 12.15 Uhr**