Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
14.04.2005
Blatt 01

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV“

1. Sei X eine Menge und $x \in X$. Für jedes $A \subset X$ setze man $\mu(A) := 0$, wenn $x \notin A$ ist, und $\mu(A) = 1$, falls $x \in A$ ist. Zeigen Sie, dass μ ein Maß auf der Potenzalgebra von X ist.

2. Sei X eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass es für jedes Maß μ auf der Potenzalgebra $\mathcal{P}(X)$ eine Funktion $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ gibt, so dass $\mu(A) = \sum_{x \in A} \varphi(x)$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ ist.

3. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X. Seien $A_k \in \mathcal{A}$ ($k \in \mathbf{N}$), $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, sowie $\mu(A_1) < \infty$. Beweisen Sie die *Schrumpfungsformel*:
$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$$

Abgabe: Dienstag, 19. April 2005, 11.15 Uhr