Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
19.04.2005
Blatt 02

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV"

1. Sei X eine Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Dynkin-System auf X. Sei weiter $B \in \mathcal{D}$ beliebig. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}$,
$$\mathcal{D}_B := \{A \in \mathcal{D} \mid A \cap B \in \mathcal{D}\}$$
selbst wieder ein Dynkin-System auf X ist.

2. Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt *vollständig*, wenn mit jeder *Nullmenge* $M \in \mathcal{A}$ (d. h. $\mu(M) = 0$) auch jede Teilmenge $N \subset M$ in $\mathcal{A}$ liegt.
Für eine beliebige σ-Algebra $\mathcal{A}$ setze man nun:
$$\hat{\mathcal{A}} := \{\hat{A} \in \mathcal{P} \mid \exists A \in \mathcal{A},\ \exists M \in \mathcal{A} :\ \mu(M) = 0,\ \exists N \subset M :\ \hat{A} = A \cup N\}.$$
Zeigen Sie dann:
   (a) $\hat{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra und $\hat{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$;
   (b) definiert man $\hat{\mu}: \hat{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ durch $\hat{\mu}(\hat{A}) := \mu(A)$, wenn $\hat{A} = A \cup N$ wie oben ist, so zeige man, dass $\hat{\mu}$ wohldefiniert ist, $\hat{\mu}|\mathcal{A} = \mu$ ist und $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ ein vollständiger Maßraum ist. (Dieser heißt dann die *Vervollständigung* von $(X, \mathcal{A}, \mu)$.)

3. Sei $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ die Borelalgebra und $\lambda: \mathcal{B} \to [0, \infty]$ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathcal{B}$. Sei weiter $H = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass H eine Borelsche Nullmenge ist, d. h.: $H \in \mathcal{B}$ und $\lambda(H) = 0$. (Hinweis: Sei $\varepsilon > 0$. Überdecken Sie H nun so sparsam mit Quadern Q_k ($k \in \mathbf{N}$), dass $\sum_k \lambda(Q_k) \leq \varepsilon$ ist.)

Abgabe: Dienstag, 26. April 2005, 11.15 Uhr