Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
26.04.2005
Blatt 03

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV“

1. Sei $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß auf einer Menge X und $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{P}(X)$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen. Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{A}^*, \mu^* \mid \mathcal{A}^*)$ vollständig (vgl. Aufg. 2, Blatt 2) ist.

2. Sei $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0,\infty]$ das Lebesguesche äußere Maß auf $\mathbf{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $A \subset \mathbf{R}^n$ beliebig, so existiert eine Borel-Menge $B \subseteq \mathbf{R}^n$ mit $A \subseteq B$ und $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.

3. Sei $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0,\infty]$ das Lebesguesche äußere Maß auf $\mathbf{R}^n$.

   (a) Zeigen Sie, dass λ^* translationsinvariant ist.

   (b) Zeigen Sie, dass λ^* nicht σ-additiv sein kann. (Hinweis: Benutzen Sie das Beispiel einer nicht-messbaren Menge $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aus der Vorlesung.)

Abgabe: Dienstag, 3. Mai 2005, 11.15 Uhr