Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
03.05.2005
Blatt 04

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV“

1. Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-Algebren auf einer Menge X, $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ und μ_1, μ_2 Maße auf $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ mit $\mu_2|\mathcal{A}_1 = \mu_1$. Zeigen Sie: Ist $f\colon X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}_1$-messbar, so ist f auch $\mathcal{A}_2$-messbar und es gilt:
$$\int f\,d\mu_1 = \int f\,d\mu_2.$$

2. Sei $\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0,\infty]$ das Lebesguesche äußere Maß auf $\mathbf{R}^n$ und sei $\mathcal{L}$ die Lebesgue-Algebra der λ^*-messbaren Mengen auf $\mathbf{R}^n$. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}, \lambda^*|\mathcal{L})$ die Vervollständigung von $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$ (vgl. Aufgabe 2, Blatt 2) ist, wo $\mathcal{B}$ die Borel-Algebra und $\lambda = \lambda^*|\mathcal{B}$ das Borel-Lebesguesche Maß bezeichnet (Hinweis: Aufgabe 2, Blatt 3).

3. (a) Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $Y \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{A} : A \subset Y\}$ eine σ-Algebra auf Y ist (die *Spuralgebra* von $\mathcal{A}$ auf Y).

   (b) Sei $H := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ und bezeichne $f\colon \mathbf{R}^n \to H \subset \mathbf{R}^{n+1}$ die Einbettung $x \mapsto (x, 0)$. Zeigen Sie: Es ist $B \subset H$ genau dann Borelsch (im $\mathbf{R}^{n+1}$), wenn es eine Borelmenge $A \subseteq \mathbf{R}^n$ mit $f(A) = B$ gibt.

   (c) Sei $\mathcal{B}_n$ die Borelalgebra und $\mathcal{L}_n$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbf{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 2$ gilt: $\mathcal{B}_n \neq \mathcal{L}_n$.

Abgabe: Dienstag, 10. Mai 2005, 11.15 Uhr